UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Dr. Tobias Mai
M.Sc Felix Leid

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie
Sommersemester 2017

Blatt 13
Abgabe: Donnerstag, 20.7.2017, 12:15 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.**

(a) Bestimmen Sie mithilfe des Satzes von Rouché die Anzahl der Nullstellen der beiden Polynome

$$p(z) = 2z^4 - 5z + 2 \qquad \text{und} \qquad q(z) = z^5 + iz^3 - 4z + i$$

auf jeder der beiden offenen Kreisscheiben $D(0,1)$ und $D(0,2)$.

(b) Wir betrachten nun die meromorphe Funktion $f = \frac{p}{q} \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ sowie den Zyklus

$$\Gamma = \gamma_{0,2,\circlearrowleft} - \gamma_{0,1,\circlearrowleft}$$

Bestimmen Sie den Wert des Integrals

$$\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z.$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.**

(a) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei γ ein geschlossener, stückweise glatter Weg in Ω. Weiter sei eine auf γ^* nullstellenfreie Funktion $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ gegeben. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{Ind}_{f\circ\gamma}(0) = \sum_{z \in \mathcal{N}(f)} \operatorname{ord}(f,z) \operatorname{Ind}_\gamma(z).$$

(b) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $V \subset G$ eine offene Teilmenge mit Randzyklus Γ, der nur aus einem geschlossenen, stückweise glatten Weg γ besteht. Weiter seien Funktionen $f, g \in \mathcal{O}(G)$ gegeben, für die die Abschätzung aus dem Satz von Rouché gelte, d.h.

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \qquad \text{für alle } z \in \Gamma^* = \gamma^* = \partial V.$$

Zeigen Sie unter Zuhilfenahme von Lemma 7.6 der Vorlesung, dass dann

$$\operatorname{Ind}_{f\circ\gamma}(0) = \operatorname{Ind}_{g\circ\gamma}(0)$$

gilt, und geben Sie damit einen weiteren Beweis des Satzes von Rouché in der hier betrachteten speziellen Situation.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabenteil (a).

bitte wenden

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ eine kompakt konvergente Folge von auf G nullstellenfreien, holomorphen Funktionen.
Zeigen Sie, dass die nach dem Satz von Weierstraß holomorphe Grenzfunktion f entweder identisch auf G verschwindet oder ebenfalls keine Nullstelle besitzt.

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Für $n \in \mathbb{N}_0$ bezeichne e_n das holomorphe Polynom, das gegeben ist durch

$$e_n(z) := \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}.$$

Zeigen Sie, dass es für jedes $r > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ gibt, sodass für alle $n \geq n_0$ das Polynom e_n auf der Kreisscheibe $D(0, r)$ nullstellenfrei ist.

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $\mathcal{F}$ eine beliebige Teilmenge von $\mathcal{O}(\Omega)$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\mathcal{F}$ ist genau dann lokalbeschränkt, wenn es zu jedem $z \in \Omega$ ein $r = r(z) > 0$ gibt, sodass gilt $\overline{D(z, r)} \subset \Omega$ und

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_{\overline{D(z,r)}} < \infty.$$

(b) Ist $\mathcal{F}$ lokalbeschränkt, dann ist für alle $k \in \mathbb{N}$ auch

$$\mathcal{F}^{(k)} := \{f^{(k)} |\ f \in \mathcal{F}\}$$

eine lokalbeschränkte Teilmenge von $\mathcal{O}(\Omega)$.

Zusatzaufgabe* (10 Zusatzpunkte*)**.** Beweisen Sie den folgenden Satz:

Satz (von Vitali)**.** Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ eine lokalbeschränkte Folge aus $\mathcal{O}(G)$ mit der Eigenschaft, dass

$$A := \left\{ z \in G \middle| \ (f_n(z))_{n=1}^{\infty} \text{ konvergiert} \right\}$$

einen Häufungspunkt in G hat, dann konvergiert $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ kompakt auf G.