UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Dr. Tobias Mai
M.Sc. Felix Leid

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie

Sommersemester 2017

Klausurvorbereitungsblatt

(keine Abgabe)

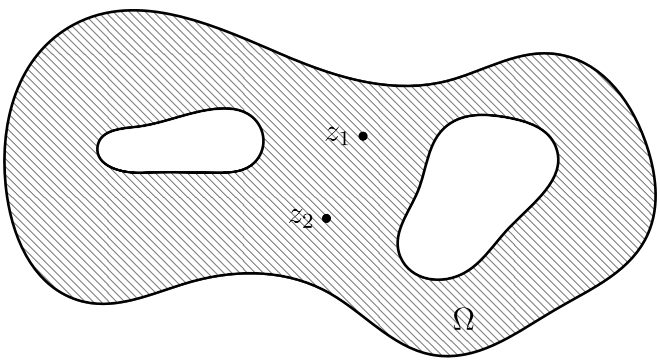
Die folgenden Aufgaben sollen Sie bei der Vorbereitung auf die Klausur unterstützen. Diese werden *nicht schriftlich* abgegeben, sondern werden in der Fragestunde am **Mittwoch, dem 02. August, um 10 Uhr ct. in HS III** besprochen.
Wir empfehlen, dass Sie sich die Vorbereitungsaufgaben sorgfältig und ohne Zusammenarbeit mit anderen selbst erarbeiten.
Die hier vorgestellte Zusammenstellung an Aufgaben ist ***nicht* repräsentativ** für die Klausur, weder was die Auswahl des Stoffs, noch was den Schwierigkeitsgrad angeht!

(1) Wiederholen Sie die wichtigsten Grundbegriffe der Vorlesung, sodass Sie in der Lage sind, diese zu definieren und anhand von kleinen Beispielen zu erläutern.

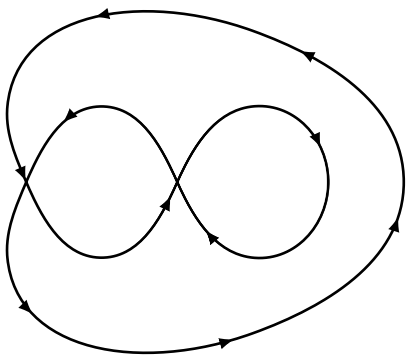
(2) Wiederholen Sie die wichtigsten Sätze der Vorlesung, sodass Sie in der Lage sind, diese inklusive aller Voraussetzungen anzugeben.

(3) In der Grafik (a) ist eine offene Menge Ω dargestellt. Markiert sind zudem zwei Punkte $z_1, z_2 \in \Omega$. Ist Ω zusammenhängend oder sogar einfach zusammenhängend? Ergänzen Sie in der Zeichnung einen in Ω nullhomologen Zyklus Γ in Ω mit der Eigenschaft, dass $\mathrm{Ind}_\Gamma(z_1) = -1$ und $\mathrm{Ind}_\Gamma(z_2) = 0$.

(4) Gegeben sei der in Grafik (b) dargestellte glatte Weg γ in $\mathbb{C}$. Bestimmen Sie den Wert von Ind_γ auf jeder Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.



(a) Grafik zu Aufgabe (3)



(b) Grafik zu Aufgabe (4)

bitte wenden

(5) Bestimmen Sie alle Punkte, in denen die durch $f(x+iy) = xye^{x+iy}$ definierte Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist.

(6) Sei $v \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $v(x,y) = 4x^3y - 4xy^3 + 2y$. Zeigen Sie, dass v harmonisch ist, und bestimmen Sie eine ganze Funktion f, die $\mathrm{Im}(f(x+iy)) = v(x,y)$ auf ganz $\mathbb{C}$ erfüllt.

(7) Sei $r > 0$ und $f \colon D(0,r) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die auf $D(0,r) \cap \mathbb{R}$ nur reelle Werte annehme. Beweisen Sie, dass die Koeffizienten $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ in der Potenzreihenentwicklung von f um den Punkt 0 alle reell sind und dass $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ für alle $z \in D(0,r)$ gilt.

(8) Es seien f eine ganze Funktion und P ein holomorphes Polynom. Es gebe ein $C > 0$, sodass $|f(z)| \leq C|P(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass dann $f = \lambda P$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ gelten muss.

(9) Die Funktionen $u \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f \colon \mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{2}, 2\} \to \mathbb{C}$ seien gegeben durch

$$u(\vartheta) := \frac{1}{5 - 4\cos(\vartheta)} \qquad \text{und} \qquad f(z) := \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{3}\frac{1}{1-2z}.$$

(i) Zeigen Sie, dass $u(\vartheta) = f(e^{i\vartheta})$ für alle $\vartheta \in \mathbb{R}$ gilt.

(ii) Berechnen Sie die Laurentreihe von f auf $R(0; \frac{1}{2}, 2)$.

(iii) Folgern Sie mithilfe der Substitution $\cos(n\vartheta) = \frac{1}{2}(z^n + z^{-n})$ für $z = e^{i\vartheta}$ aus Ihrem Ergebnis aus Teil (ii), dass die Fourierreihe von u gegeben ist durch

$$u(\vartheta) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n\vartheta).$$

(iv) Bestimmen Sie den Wert des Integrals $\int_0^{2\pi} u(\vartheta) \mathrm{d}\vartheta$.

(10) Gibt es eine Funktion $f \in \mathcal{O}(D(0,1))$ mit $|f(z)|^2 + |z|^2 = 1$ für alle $z \in D(0,1)$?

(11) Klassifizieren Sie die isolierte Singularität 0 bei beiden Funktionen $f_1(z) := z\sin(\frac{1}{z^2})$ und $f_2(z) = \frac{\cos(z)-1}{2z^3}$ und bestimmen Sie $\mathrm{Res}(f_1; 0)$ und $\mathrm{Res}(f_2; 0)$.

(12) Gegeben sei das Polynom $p(z) = z^4 - 2z + 3$. Bestimmen Sie die Anzahl aller Nullstellen von p, die in $D(0,1)$ liegen, und berechnen Sie $\mathrm{Ind}_\gamma(0)$ für $\gamma := p \circ \gamma_{0,1,\circlearrowleft}$.

(13) Berechnen Sie die beiden uneigentlichen Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2 + x + 1}{x^4 + 5x^2 + 4} \mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad \int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{(1+x^2)^3} \mathrm{d}x.$$

(14) Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Funktionen $f \in \mathcal{O}(D(0,1))$ mit der Eigenschaft

$$\sup_{0 \leq r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})| \mathrm{d}t \leq 1.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ eine normale Familie ist.

(15) Konstruieren Sie eine ganze Funktion f, die Nullstellen zweiter Ordnung in allen Punkten aus $\{\sqrt{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ hat und ansonsten keine weiteren Nullstellen besitzt.

Viel Erfolg!