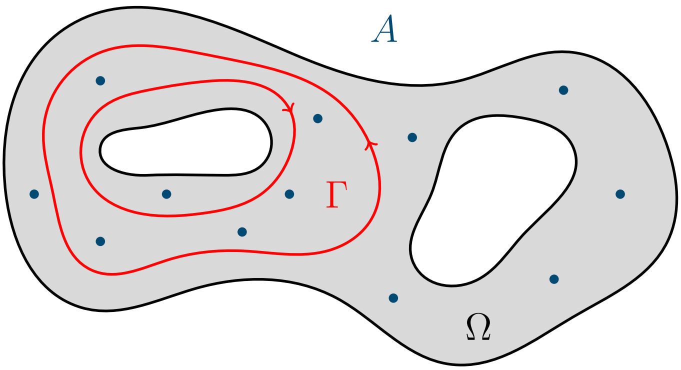
Funktionentheorie

gehört bei Dr. Tobias Mai im Sommer 2017



$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma f(z)\, dz = \sum_{z \in A} \mathrm{Ind}_\Gamma(z) \mathrm{Res}(f; z)$$

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Hinweise

Übungsbetrieb und Zulassungsbedingungen zur Prüfung Um die Zulassung zur Prüfung in der „Funktionentheorie“ zu erhalten, sind 50 % der insgesamt erreichbaren Punkte auf den Übungsblättern zu erreichen, außerdem herrscht Anwesenheitspflicht in den Übungen, ab dem zweiten Fehlen in der Übung müssen weitere Ausfälle mit ärztlichem Attest entschuldigt werden.

Hinweise zur Mitschrift Das vorliegende Skript ist nicht wertvoller als eine handschriftliche Mitschrift und ersetzt keinesfalls das eigenständige Besuchen der Vorlesung oder das selbstständige Nachbereiten. Computersatz ist kein Garant für Fehlerfreiheit!

Diese Mitschrift wurde von einem Studenten erstellt und vom Dozenten autorisiert und teilweise ergänzt. Tippfehler können aber natürlich trotzdem nicht ausgeschlossen werden. Entsprechende Hinweise sind daher ausdrücklich erwünscht:

s9fhguen@stud.uni-saarland.de
mai@math.uni-sb.de

Vorwort

Bei dem vorliegenden Text handelt es sich um die Mitschrift der Vorlesung „Funktionentheorie“, die ich im Sommersemester 2017 an der Universität des Saarlandes gehalten habe. Die vierstündige Vorlesung, die von zweistündigen Übungen begleitet wurde, richtete sich an Bachelorstudenten des vierten Semesters sowie an Lehramtsstudierende. Vorausgesetzt wurde Grundkenntnisse der Analysis (Analysis I und II) sowie der Linearen Algebra (Lineare Algebra I).

Das Skript wurde vorlesungsbegleitend von Friedrich Günther, einem Studenten aus meiner Vorlesung, erstellt und später in die nun vorliegende Form gebracht. Hierfür möchte ich mich an dieser Stelle ganz herzlich bedanken.

Bedanken möchte ich mich zudem bei Felix Leid, der den Übungsbetrieb organisiert hat, sowie bei Umangathan Kandasamy, Ricardo Schnur und Andreas Widenka, die als Bremser tätig waren.

Saarbrücken, im Oktober 2017 *Tobias Mai*

Inhaltsverzeichnis

Einführung

„Funktionentheorie ist die Theorie holomorpher Funktionen."

Um einen ersten Eindruck davon zu gewinnen, was holomorphe Funktionen eigentlich sind, beginnen wir mit einem (sehr) knappen Überblick über die Geschichte der Funktionentheorie.

(i) **18. Jahrhundert** (Anfänge der Funktionentheorie)

   (1) *Leonhard Euler* (1707 - 1783): erste Ansätze

   (2) *Carl Friedrich Gauß* (1777 - 1855): mit den Ideen vertraut, hat jedoch nicht aktiv an der Entwicklung dieser Theorie mitgearbeitet

   Beide haben die komplexen Zahlen erfolgreich in ihren Arbeiten verwendet und haben diese dadurch unter ihren Zeitgenossen bekannt gemacht.

(ii) **19. Jahrhundert** (Beginn der modernen Funktionentheorie)

   (1) *Augustin-Louis Cauchy* (1789 - 1857) verstand unter einer holomorphen Funktion im Wesentlichen eine Funktion, die *komplex differenzierbar* ist. Seinen analytischen Zugang zur Funktionentheorie baute er auf seinem berühmten Integralsatz auf und führte dabei auch den Begriff des Residuums ein.

   (2) *Bernhard Riemann* (1826 - 1866) hatte eine geometrische Sichtweise auf die Funktionentheorie. Er betrachtete Funktionen als Abbildungen zwischen Teilmengen der komplexen Ebene und interessierte sich für solche, die *(lokal) konform* sind, d. h. lokal geometrische Eigenschaften erhalten.

   (3) *Karl Weierstraß* (1815 - 1897) wählte einen vergleichsweise algebraischen Zugang zur Funktionentheorie, indem er Funktionen betrachtete, die *(komplex) analytisch* sind, d. h., sich lokal in eine konvergente Potenzreihe entwickeln lassen.

   Da sich diese, auf den ersten Blick recht unterschiedlichen Ansätze letztlich als gleichwertig herausstellen, haben holomorphe Funktionen sehr starke Eigenschaften und es stehen viele verschiedene Werkzeuge für deren Behandlung zur Verfügung. Dies ist der Grund für die beeindruckende Reichhaltigkeit der Funktionentheorie.

Die Funktionentheorie hat vielfältige Anwendungen innerhalb der Mathematik – zum Beispiel in den Gebieten Funktionalanalysis und Zahlentheorie – aber auch in der Physik.

„Funktionentheorie ist ein einmaliges Geschenk an die Mathematiker."

(C. L. Siegel)

0. Die komplexen Zahlen

In diesem Kapitel stellen wir das nötige Grundwissen über die komplexen Zahlen bereit. Dabei beleuchten wir sowohl die algebraischen, als auch einige geometrische und topologische Aspekte.

I. Algebraische Aspekte

Mit dem folgenden Satz führen wir den Körper der komplexen Zahlen ein.

Satz 0.1: *Versehen wir die Menge* $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ *mit der Addition*

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

und der Multiplikation

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

dann ist $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *ein Körper, der einen zum Körper der reellen Zahlen* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *isomorphen Unterkörper*

$$\mathbb{C}_\mathbb{R} := \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}1 \qquad \textit{mit} \quad 1 := (1, 0)$$

enthält. Wir nennen $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *den Körper der* komplexen Zahlen *und bezeichnen* $\mathrm{i} := (0, 1)$ *als die* imaginäre Einheit[1]*. In* $\mathbb{C}$ *besitzt die Gleichung* $z^2 + 1 = 0$ *genau die beiden Lösungen* $-\mathrm{i}$ *und* i*.*

Beweis: Von der Gültigkeit der Körperaxiome überzeugt man sich leicht durch direktes Nachrechnen. Wir bemerken, dass das multiplikative Inverse für $z = (x, y) \neq (0, 0)$ gegeben ist durch

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right),$$

weiterhin klar ist, dass „+“ und „·“ auf $\mathbb{R}1 = \mathbb{C}_\mathbb{R}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation auf $\mathbb{R}$ verträglich ist. Ferner gilt

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1. \qquad \blacksquare$$

Im Folgenden identifizieren wir $\mathbb{C}_\mathbb{R}$ mit $\mathbb{R}$.

Notation 0.2: Jede komplexe Zahl $(x, y) = z \in \mathbb{C}$ besitzt eine eindeutige Darstellung der folgenden Form:

$$z = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x + \mathrm{i}y.$$

Wir nennen in diesem Fall

[1] Diese Bezeichnung geht auf Euler zurück, der sie erstmals 1777 gebrauchte.

(i) $\operatorname{Re}(z) := x$ den *Realteil* von z,

(ii) $\operatorname{Im}(z) := y$ den *Imaginärteil* von z,

(iii) $\overline{z} := x - \mathrm{i}y$ die zu z *konjugiert komplexe Zahl*,

(iv) $|z| := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ den *Betrag* von z.

Es gelten die folgenden Rechenregeln:

(i) $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \overline{z})$,

(ii) $\overline{\overline{z}} = z$, $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$,

(iii) $|z| = |\overline{z}|$, $|z + w| \leq |z| + |w|$, $|z \cdot w| = |z||w|$.

II. Geometrische Aspekte

Die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen wird oft durch die sogenannte *Gaußsche Zahlenebene* veranschaulicht; siehe dazu Abbildung 0.1.

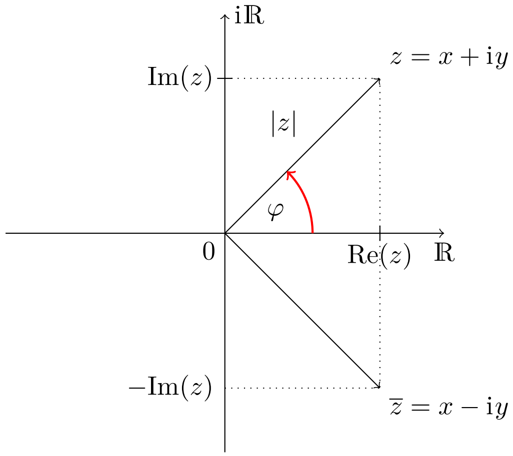


Abbildung 0.1.: Skizze zur Darstellung komplexer Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene.

Wir nennen $\mathbb{R}$ die *reelle Achse* und $\mathrm{i}\mathbb{R}$ die *imaginäre Achse*. Eine komplexe Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ beschreibt einen Punkt in der komplexen Ebene $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, kann aber auch mit dem zugehörigen Ortsvektor

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

identifiziert werden. Dieser hat die Länge $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Geometrisch erhält man die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$ durch Spiegelung von z an der reellen Achse. Weiterhin besitzt jedes $z \neq 0$ eine eindeutige Darstellung der Form

$$z = r\big(\cos(\varphi), \sin(\varphi)\big)$$

mit $r = |z| > 0$ und einem Winkel $\varphi = \operatorname{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$, dem *Argument* von z. Wir nennen dies die *Polardarstellung von z*.

In der Gaußschen Zahlenebene lassen sich die algebraischen Verknüpfungen auf $\mathbb{C}$ gut veranschaulichen, siehe dazu Abbildung 0.2.

(i) Die Addition in $\mathbb{C}$ entspricht der Vektoraddition in $\mathbb{R}^2$.

(ii) Multiplikation in $\mathbb{C}$ bedeutet Betragsmultiplikation und Winkeladdition: Zu $z_1 = r_1(\cos(\varphi_1), \sin(\varphi_1))$ und $z_2 = r_2(\cos(\varphi_2), \sin(\varphi_2))$ ist

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2)\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2), \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big).$$

Bemerkung 0.3 (Euler-Formel, 1748): Für die *komplexe Exponentialfunktion*

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \exp(z) := e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \end{aligned}$$

gilt die *Eulersche Formel*

$$e^{\mathrm{i}\varphi} = \cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi).$$

Die Polardarstellung lässt sich somit kürzer schreiben als

$$z = re^{\mathrm{i}\varphi}.$$

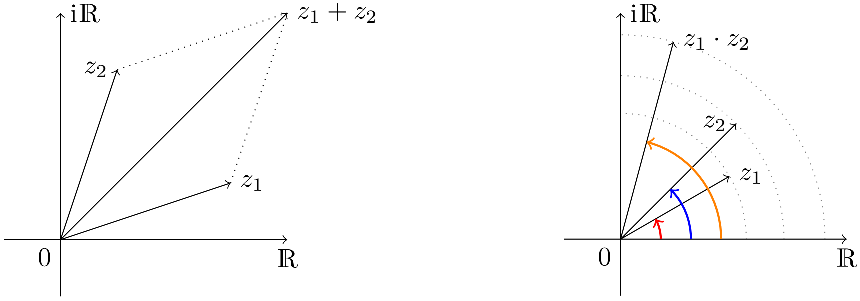


Abbildung 0.2.: Skizzen zu den algebraischen Verknüpfungen auf $\mathbb{C}$.

III. Topologische Aspekte

Der Betrag auf den komplexen Zahlen

$$|\cdot| : \mathbb{C} \longrightarrow [0, \infty)$$

ist eine Norm auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$ (nämlich die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^2$) und induziert damit eine Metrik

$$\begin{aligned} d = d_{|\cdot|} : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\longrightarrow [0, \infty) \\ d(z, w) &:= |z - w|. \end{aligned}$$

Wir können somit über offene Mengen, abgeschlossene Mengen, Konvergenz, Cauchy-Folgen, Stetigkeit usw. in $\mathbb{C}$ sprechen. Insbesondere ist $\mathbb{C}$ (wie alle $\mathbb{R}^n$) vollständig. Ferner lässt sich die Konvergenz einer Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ gegen ein $z \in \mathbb{C}$ wie folgt charakterisieren (vgl. Aufgabe 1, Blatt 0):

$$\begin{aligned} z_n \to z \qquad &\Leftrightarrow \qquad |z_n - z| \to 0 \\ &\Leftrightarrow \qquad \mathrm{Re}(z_n) \to \mathrm{Re}(z) \text{ und } \mathrm{Im}(z_n) \to \mathrm{Im}(z). \end{aligned}$$

Notation 0.4 (Offene Kreisscheibe): Für $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ bezeichnen wir mit

$$D(z_0, r) := D_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$$

die *offene Kreisscheibe um z_0 mit Radius r*.

Definition 0.5 (Zusammenhang): Es sei (X, d) ein metrischer Raum.

(i) X heißt *zusammenhängend*, wenn es keine Zerlegung $X = U \cup V$ in disjunkte, nichtleere, offene Teilmengen $U, V \subset X$ gibt.

(ii) X heißt *wegzusammenhängend*, wenn es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ eine stetige Funktion $\gamma : [a, b] \to X$ gibt mit $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$. Wir nennen γ einen *Weg* mit *Anfangspunkt* x und *Endpunkt* y.

(iii) Eine Teilmenge $Y \subset X$ heißt zusammenhängend oder wegzusammenhängend, wenn der metrische Raum $(Y, d|_{Y\times Y})$ zusammenhängend oder wegzusammenhängend ist.

Satz 0.6: *Jeder wegzusammenhängende metrische Raum ist zusammenhängend.*

Beweis: Wir nehmen an, dass X nicht zusammenhängend ist, d. h., es existieren $U, V \subset X$ offen und nicht leer, so dass $X = U \cup V$. Da U, V nicht leer sind, gibt es Punkte $x \in U$, $y \in V$. Da X wegzusammenhängend ist, existiert ein Weg $\gamma : [a, b] \to X$ mit $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$. Wegen der Stetigkeit von γ sind die Mengen $U' := \gamma^{-1}(U) \ni a$ und $V' := \gamma^{-1}(V) \ni b$ offen; ferner sind U' und V' disjunkt und nicht leer mit $[a, b] = U' \cup V'$. Da $[a, b]$ zusammenhängend ist (vgl. Aufgabe 1, Blatt 2), ist dies ein Widerspruch. ■

Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch, es gilt jedoch:

Satz 0.7 (Gebiete in $\mathbb{C}$): *Sei $\varnothing \neq G \subset \mathbb{C}$ offen. Dann sind äquivalent:*

(i) *G ist zusammenhängend,*

(ii) *G ist wegzusammenhängend,*

(iii) *G ist* polygonzugzusammenhängend, *d. h. je zwei Punkte $u, v \in G$ lassen sich durch einen Polygonzug $\gamma : [a, b] \to G$ verbinden. Wir nennen einen Weg $\gamma : [a, b] \to G$* Polygonzug, *falls es eine endliche Unterteilung*

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$$

des Intervalls $[a, b]$ gibt, so dass $\gamma(t_j) = z_j$ für $j = 0, 1, \ldots, n-1, n$ gilt und jeder der Teilwege $\gamma|_{[t_j, t_{j+1}]}$ für $j = 0, 1, \ldots, n-1$ affin linear ist, d. h. es gilt

$$\gamma(t) = z_j + \frac{t - t_j}{t_{j+1} - t_j}(z_{j+1} - z_j) \qquad \text{für} \quad t_j \leq t \leq t_{j+1}.$$

Erfüllt G die äquivalenten Bedingungen (i), (ii) *und* (iii)*, so nennen wir G ein* Gebiet*.*

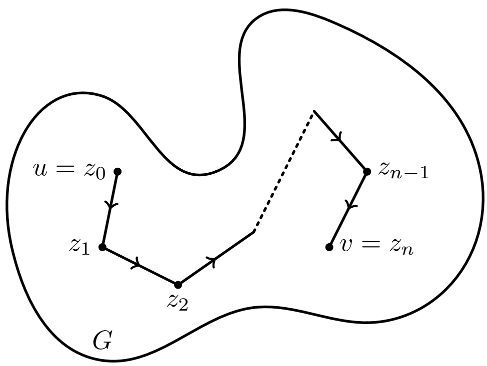


Abbildung 0.3.: Skizze zum Polygonzugzusammenhang.

Beweis: Die Aussage (iii) $\Rightarrow$ (ii) ist klar, (ii) $\Rightarrow$ (i) ist Satz 0.6. Zu (i) $\Rightarrow$ (iii): Für $z \in G$ setzen wir

$$U(z) := \{w \in G \mid \text{Es gibt einen Polygonzug } \gamma \text{ von } z \text{ nach } w\}$$

und $V(z) := G \setminus U(z)$. Dann gilt:

- *$U(z)$ ist offen.* Sei $w \in U(z)$. Definitionsgemäß gibt es also einen Polygonzug $\gamma : [a, b] \to G$ von z nach w. Ferner, da G offen ist, können wir $r > 0$ finden, so dass $D_r(w) \subset G$. Damit existiert für alle $\tilde{w} \in D_r(w)$ ein Polygonzug

$$\tilde{\gamma} : \ [a, b+1] \to G, \ t \mapsto \begin{cases} \gamma(t), & t \in [a, b] \\ w + (t-b)(\tilde{w} - w), & t \in [b, b+1] \end{cases}.$$

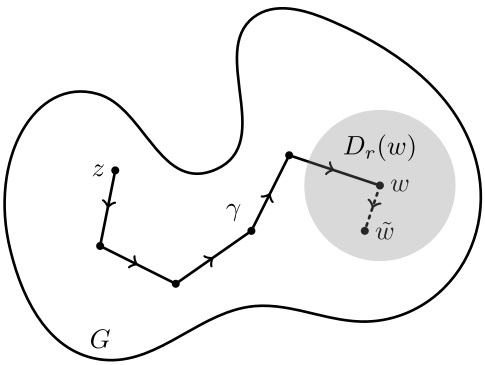


Abbildung 0.4.: Skizze zur Verdeutlichung, warum $U(z)$ offen ist.

Dieses $\tilde{\gamma}$ ist nun ein Polygonzug von z nach $\tilde{w}$, d. h. wir haben $\tilde{w} \in U(z)$. Da $w \in U(z)$ beliebig vorgegeben war, folgt $D_r(w) \subset U(z)$.

- *$V(z)$ ist offen.* Mit $w \in V(z)$ liegt auch jede Kreisscheibe $D_r(w)$ (mit $r > 0$ klein genug, so dass $D_r(w) \subseteq G$ gilt) noch ganz in $V(z)$, denn sonst könnten wir den Polygonzug von z nach $\tilde{w}$ durch Hinzufügen der Strecke von $\tilde{w}$ nach w (die natürlich innerhalb von $D_r(w)$ und damit auch von G liegt) zu einem einen Polygonzug γ erweitern, der z und w verbinden würde – im Widerspruch zur Voraussetzung $w \in V(z)$.
- *Es gilt $U(z) \neq \varnothing$*, da $z \in U(z)$ (denn $\gamma : [0,1] \to G, t \mapsto z$ ist ein Polygonzug von z nach z).

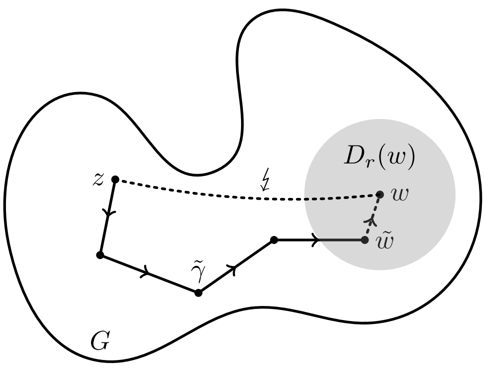


Abbildung 0.5.: Skizze zur Verdeutlichung, warum $V(z)$ offen ist.

Weil nun $G = U(z) \cup V(z)$ gilt und G zusammenhängend ist, folgt $V(z) = \varnothing$, d. h. $G \setminus U(z) = \varnothing$, also $G = U(z)$, d. h. jeder Punkt in G kann durch einen Polygonzug mit z verbunden werden. Da auch z beliebig vorgegeben war, folgt (iii). ■

Definition 0.8: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Eine offene und zusammenhängende Teilmenge $\varnothing \neq G \subset \Omega$ heißt *Zusammenhangskomponente von* Ω, falls auch $\Omega \setminus G$ offen ist.

Satz 0.9: *Ist* $\varnothing \neq \Omega \subset \mathbb{C}$ *offen, so hat* Ω *höchstens abzählbar unendlich viele Zusammenhangskomponenten.*

Beweis: Für $z \in \Omega$ betrachten wir

$$G(z) := \{w \in \Omega \mid \text{Es existiert ein Polygonzug } \gamma \text{ von } z \text{ nach } w\}.$$

Wie im Beweis von Satz 0.7 sehen wir, dass die Aussagen

- $G(z)$ ist offen,
- $\Omega \setminus G(z)$ ist offen und
- $G(z) \neq \varnothing$

gelten. Ferner ist $G(z)$ polygonzugzusammenhängend, nach Satz 0.7 also zusammenhängend. Damit sind die $G(z)$ Zusammenhangskomponenten von Ω. Umgekehrt ist jede Zusammenhangskomponente G von Ω von der Form $G(z)$ für ein $z \in \Omega$ (nämlich für jedes $z \in G$). Damit haben wir

$$\begin{aligned}\mathscr{G} &:= \{G \mid G \text{ ist Zusammenhangskomponente von } \Omega\}\\ &= \{G(z) \mid z \in \Omega\}\\ &= \{G(z) \mid z \in \Omega \cap (\mathbb{Q} + \mathrm{i}\mathbb{Q})\},\end{aligned}$$

da $\mathbb{Q} + \mathrm{i}\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{C}$ liegt. Mit $\mathbb{Q}$ ist auch $\mathbb{Q} + \mathrm{i}\mathbb{Q}$ abzählbar und damit ist $\Omega \cap (\mathbb{Q} + \mathrm{i}\mathbb{Q})$ abzählbar. ■

Satz 0.10: *Ist* $K \subset \mathbb{C}$ *kompakt, dann besitzt* $\mathbb{C} \setminus K$ *genau eine unbeschränkte Zusammenhangskomponente.*

Beweis: Wähle $r > 0$ mit $K \subset \overline{D(0,r)}$. Da $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0,r)}$ zusammenhängend ist, muss $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0,r)}$ in einer Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus K$ enthalten sein, sagen wir G_0; diese Zusammenhangskomponente ist dann klarerweise unbeschränkt. Für jede andere Zusammenhangskomponente G von $\mathbb{C} \setminus K$ gelten dann die Inklusionen

$$G \subset \mathbb{C} \setminus G_0 \subset \mathbb{C} \setminus (\mathbb{C} \setminus \overline{D(0,r)}) = \overline{D(0,r)}.$$

Damit ist jedes solche G beschränkt. ■

1. Komplexe Differenzierbarkeit und Holomorphie

Erinnerung 1.1: Ist $I := (a, b)$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$ ein beliebiges offenes Intervall in $\mathbb{R}$, dann heißt eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ *differenzierbar an der Stelle* $x_0 \in I$, falls der Grenzwert

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

existiert. Dies war Gegenstand der Analysis I.

In der Analysis II wurden allgemeiner Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ für offene Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ untersucht. Eine solche Funktion f nennen wir *(reell) differenzierbar an der Stelle* $x_0 \in \Omega$, falls es eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $T = Df(x_0) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ gibt, so dass gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{\|x - x_0\|} \|f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)\| = 0. \tag{1.2}$$

In diesem Fall ist T eindeutig bestimmt und gegeben durch die *Jacobi-Matrix*

$$T = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}.$$

Komplexe Differenzierbarkeit wird (unter Ausnutzung der Körperstruktur von $\mathbb{C}$) in Analogie zu Gl. (1.1) definiert. Wegen $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ können wir dies auch mit der reellen Differenzierbarkeit Gl. (1.2) vergleichen und werden sehen, dass komplexe Differenzierbarkeit eine deutlich stärkere Forderung darstellt.

Definition 1.2 (Komplexe Differenzierbarkeit): Es seien $\varnothing \neq \Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine Funktion.

(i) Wir nennen f *komplex differenzierbar an der Stelle* $z_0 \in \Omega$, falls der Grenzwert

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C} \tag{1.3}$$

existiert. Wir nennen $f'(z_0)$ die *(komplexe) Ableitung von f an der Stelle z_0*.

(ii) Wir nennen f *holomorph* auf Ω, falls f an jeder Stelle $z_0 \in \Omega$ komplex differenzierbar ist.

Die Menge aller auf Ω holomorphen Funktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{O}(\Omega)$; in der Literatur findet man auch oft die Bezeichnung $\mathrm{H}(\Omega)$.

Bemerkung 1.3: Explizit bedeutet Gl. (1.3), dass

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, z \in D^{\bullet}(z_0, \delta) : \qquad \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon.$$

Hierbei bezeichnet $D^\bullet(z_0, r)$ für $r > 0$ die *punktierte Kreisscheibe um z_0 mit Radius r*, d. h.

$$\begin{aligned} D^\bullet(z_0, r) &:= \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < r\} \\ &= D(z_0, r) \setminus \{z_0\}. \end{aligned}$$

Beispiel 1.4:

(i) Für beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ist

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad z \longmapsto z^n$$

an jeder Stelle $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar mit

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \sum_{k=1}^{n} z_0^{n-k} z^{k-1} = n z_0^{n-1},$$

gehört also zu $\mathcal{O}(\mathbb{C})$.

(ii) Die Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad z \mapsto \frac{1}{z}$$

gehört zu $\mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$, denn für $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}}{z - z_0} = -\frac{1}{z z_0} \xrightarrow{z \to z_0} -\frac{1}{z_0^2},$$

d. h. $f'(z_0) = -\frac{1}{z_0^2}$.

(iii) Die Funktion

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad z \longmapsto \overline{z}$$

ist an keiner Stelle $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, denn für $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + \mathrm{i}h) - f(z_0)}{(z_0 + \mathrm{i}h) - z_0} &= \frac{\overline{(z_0 + \mathrm{i}h)} - \overline{z_0}}{\mathrm{i}h} = -1 \xrightarrow{h \to 0} -1, \\ \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{(z_0 + h) - z_0} &= \frac{\overline{(z_0 + h)} - \overline{z_0}}{h} = \;\; 1 \xrightarrow{h \to 0} \;\; 1. \end{aligned}$$

Bemerkung 1.5: Beispiel 1.4 (iii) verdeutlicht bereits, dass komplexe Differenzierbarkeit eine starke Forderung ist, denn insbesondere müssen die beiden Grenzwerte

$$\begin{aligned} \lim_{\mathbb{R} \ni h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &= \frac{\partial}{\partial x} f(x + \mathrm{i}y)\Big|_{x + \mathrm{i}y = z_0} =: \frac{\partial f}{\partial x}(z_0), \\ \lim_{\mathbb{R} \ni h \to 0} \frac{f(z_0 + \mathrm{i}h) - f(z_0)}{\mathrm{i}h} &= \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\partial}{\partial y} f(x + \mathrm{i}y)\Big|_{x + \mathrm{i}y = z_0} =: \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \end{aligned}$$

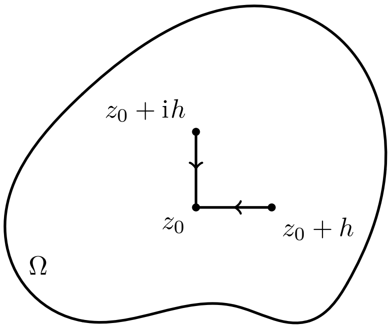


Abbildung 1.1.: Skizze zum komplexen Differenzenquotienten.

existieren und jeweils den gleichen Wert $f'(z_0)$ ergeben, d. h.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = f'(z_0) = \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\partial f}{\partial y}(z_0). \tag{1.4}$$

Wir schreiben nun $f = u + \mathrm{i}v$ mit

$$u := \mathrm{Re}(f) : \Omega \to \mathbb{R} \quad \text{und} \quad v := \mathrm{Im}(f) : \Omega \to \mathbb{R}.$$

Dann gilt an der Stelle z_0

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + \mathrm{i} \frac{\partial v}{\partial x}(z_0), \\ \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) &= \frac{1}{\mathrm{i}} \left(\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) + \mathrm{i} \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \right) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) - \mathrm{i} \frac{\partial u}{\partial y}(z_0), \end{aligned}$$

sodass Bedingung Gl. (1.4) erzwingt, dass

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0).$$

Dies sind die *Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen an der Stelle* z_0.

Diese Beobachtungen wollen wir nun vertiefen.

Lemma 1.6: (i) *Eine Abbildung $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist genau dann $\mathbb{R}$-linear, wenn gilt:*

$$T(z) = \lambda z + \mu \overline{z}$$

mit

$$\lambda := \frac{1}{2}(T(1) - \mathrm{i}T(\mathrm{i})) \qquad \textit{und} \qquad \mu := \frac{1}{2}(T(1) + \mathrm{i}T(\mathrm{i}))$$

(ii) *Eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist genau dann $\mathbb{C}$-linear, wenn gilt*

$$T(\mathrm{i}) = \mathrm{i}T(1).$$

In diesem Fall hat T die Form $T(z) = T(1)z$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$: Für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} T(z) &= T(x+\mathrm{i}y) = T(1)x + T(i)y \\ &= T(1)\frac{1}{2}(z+\overline{z}) + T(\mathrm{i})\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\overline{z}) = \lambda z + \mu\overline{z}. \end{aligned}$$

$\Leftarrow$: Klar.

(ii) Die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung T ist genau dann $\mathbb{C}$-linear, wenn $\mu = 0$ in der Darstellung aus (i) gilt, also genau dann, wenn $T(\mathrm{i}) = \mathrm{i}T(1)$ erfüllt ist. Verwenden wir nun die Formel für λ, so sehen wir, dass in diesem Fall $\lambda = T(1)$ gelten muss. ∎

Jede reelle Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ induziert unter der Identifikation $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ vermöge

$$x + \mathrm{i}y \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

$$\begin{aligned} T(x+\mathrm{i}y) &= (ax+by) + \mathrm{i}(cx+dy) \\ &= \underbrace{(a+\mathrm{i}c)}_{=T(1)}x + \underbrace{(b+\mathrm{i}d)}_{=T(\mathrm{i})}y. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Satz 1.7: *Es sei $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ eine reelle Matrix. Dann sind äquivalent*

(i) *Die induzierte Abbildung $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist $\mathbb{C}$-linear,*

(ii) *Es gilt $c = -b$ und $d = a$.*

Beweis: Die Abbildung $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist wegen Lemma 1.6 (ii) genau dann $\mathbb{C}$-linear, wenn $T(\mathrm{i}) = \mathrm{i}T(1)$ gilt, also wegen Gl. (1.5) genau dann, wenn

$$b + \mathrm{i}d = \underbrace{\mathrm{i}(a+\mathrm{i}c)}_{=-c+\mathrm{i}a}$$

gilt, also genau dann, wenn $b = -c$ und $d = a$ gelten. ∎

Satz 1.8: *Sei $\varnothing \neq \Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Für $f = u + \mathrm{i}v : \Omega \to \mathbb{C}$ und $z_0 \in \Omega$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *f ist an der Stelle z_0 komplex differenzierbar,*

(ii) *f ist im Punkt z_0 reell differenzierbar und es gelten*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0).$$

Insbesondere sind also äquivalent:

(i)′ *f ist holomorph auf Ω, d. h. $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.*

(ii)′ *f ist auf Ω reell differenzierbar und auf Ω gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \textit{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Beweis: Wir wissen bereits:

① Die Funktion f ist genau dann reell differenzierbar in z_0, wenn eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ existiert, sodass

$$\lim_{z \to z_0} \frac{1}{|z - z_0|} |f(z) - f(z_0) - T(z - z_0)| = 0.$$

In diesem Fall wird T induziert durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix}.$$

Vergleiche dazu Erinnerung 1.1.

② Nach Satz 1.7 gelten an der Stelle z_0 die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial u}{\partial x}(z_0)$$

genau dann, wenn die von der Matrix A induzierte Abbildung T $\mathbb{C}$-linear ist.

Damit erhalten wir:

(ii) $\iff$ Es gibt eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, sodass

$$\lim_{z \to z_0} \frac{1}{|z - z_0|} |f(z) - f(z_0) - \underbrace{T(z - z_0)}_{=T(1)(z-z_0)}| = 0.$$

$\iff$ Es gibt ein $\lambda \in \mathbb{C}$ (nämlich $\lambda = T(1)$), sodass

$$\lim_{z \to z_0} \frac{1}{|z - z_0|} |f(z) - f(z_0) - \lambda(z - z_0)| = 0.$$

$\iff$ (i) (mit $f'(z_0) = \lambda$)

Der Zusatz (i)' $\Leftrightarrow$ (ii)' folgt direkt aus (i) $\Leftrightarrow$ (ii), da f nach Definition 1.2 genau dann auf Ω holomorph ist, wenn f in jedem Punkt $z_0 \in \Omega$ komplex differenzierbar ist. ■

Korollar 1.9: *Ist $\varnothing \neq \Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f = u + \mathrm{i}v \in \mathscr{C}^1(\Omega)$, sodass u und v die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf Ω lösen, dann ist f holomorph auf Ω.*

Beweis: Aus der Analysis II ist bekannt: Ist $f \in \mathscr{C}^1(\Omega)$, d. h. f ist stetig partiell differenzierbar auf Ω, dann ist f total differenzierbar auf Ω. Die Behauptung folgt also mit der Implikation (ii)' $\Rightarrow$ (i)' aus Satz 1.8. ■

Bemerkung 1.10: Der Satz von *Looman-Menchoff* (1923/1936) besagt, dass eine stetige Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ bereits dann holomorph auf Ω ist, wenn

- die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ auf ganz Ω (mit Ausnahme höchstens abzählbar vieler Punkte) existieren und
- $u = \mathrm{Re}(f)$ und $v = \mathrm{Im}(f)$ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen.

Lemma 1.11: *Sei $\varnothing \neq \Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Für $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *f ist an der Stelle z_0 komplex differenzierbar mit Ableitung $f'(z_0) = \lambda$.*

(ii) *Es gibt eine in z_0 stetige Funktion $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ mit*

$$f(z) = f(z_0) + \varphi(z)(z - z_0) \quad \textit{für alle } z \in \Omega$$

und $\varphi(z_0) = \lambda$.

Beweis: $\Rightarrow$: Ist f an der Stelle z_0 komplex differenzierbar, dann definiert

$$\varphi(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}, & z \in \Omega \setminus \{z_0\}, \\ f'(z_0), & z = z_0 \end{cases}$$

eine in z_0 stetige Funktion $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$. Für diese gilt $\varphi(z_0) = f'(z_0) = \lambda$ und

$$f(z) = f(z_0) + \varphi(z)(z - z_0)$$

sowohl für $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$, als auch für $z = z_0$, d. h. es folgt (ii).

$\Leftarrow$: Für φ wie in (ii) gilt

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \Omega \setminus \{z_0\}}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z \to z_0} \varphi(z) && \text{(wegen } z \in \Omega \setminus \{z_0\}\text{)} \\ &= \varphi(z_0) && \text{(da } \varphi \text{ stetig in } z_0 \text{ ist)} \\ &= \lambda, \end{aligned}$$

d. h. f ist an der Stelle z_0 komplex differenzierbar mit Ableitung $f'(z_0) = \lambda$. ■

Korollar 1.12: *Ist $f : \Omega \to \mathbb{C}$ an der Stelle $z_0 \in \Omega$ komplex differenzierbar, dann ist f auch stetig im Punkt z_0.*

Beweis: Klar, nach Lemma 1.11. ■

Satz 1.13: *Sei $\varnothing \neq \Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $z_0 \in \Omega$.*

(i) *Sind* $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ *an der Stelle* z_0 *komplex differenzierbar, dann sind auch*

$$f + g, \qquad f \cdot g \qquad \text{und} \qquad \lambda f \quad \text{für } \lambda \in \mathbb{C}$$

an der Stelle z_0 *komplex differenzierbar mit*

$$\begin{aligned}(f+g)'(z_0) &= f'(z_0) + g'(z_0),\\ (f \cdot g)'(z_0) &= f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0),\\ (\lambda f)'(z_0) &= \lambda f'(z_0).\end{aligned}$$

(ii) *Ist* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *in* z_0 *komplex differenzierbar und gilt* $f(z_0) \neq 0$*, dann ist auch*

$$\frac{1}{f} : \Omega \setminus f^{-1}(\{0\}) \to \mathbb{C} \quad , \quad z \mapsto \frac{1}{f(z)}$$

an der Stelle z_0 *komplex differenzierbar*[1] *mit*

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(z_0) = -\frac{f'(z_0)}{f(z_0)^2}.$$

Insbesondere ist $\mathcal{O}(\Omega)$ *eine komplexe Unteralgebra von*

$$\mathscr{C}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f \text{ stetig}\}$$

und für jedes $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ *ist die Funktion* $\frac{1}{f} \in \mathcal{O}(\Omega \setminus f^{-1}(\{0\}))$.

Beweis: Beweis als Übung (Aufgabe 4, Blatt 3). ■

Korollar 1.14 (Quotientenregel): *Sind* $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ *an der Stelle* z_0 *komplex differenzierbar und gilt* $g(z_0) \neq 0$*, dann ist auch*

$$\frac{f}{g} : \Omega \setminus g^{-1}(\{0\}) \to \mathbb{C} \quad , \quad z \mapsto \frac{f(z)}{g(z)}$$

an der Stelle z_0 *komplex differenzierbar mit*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

Beweis: Klar, mit den Rechenregeln aus Satz 1.13. ■

Beispiel 1.15: (i) Jedes *komplexe Polynom* der Form

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \tag{1.6}$$

mit $n \geq 0$, $a_0, a_1, \cdots a_n \in \mathbb{C}$ gehört zu $\mathcal{O}(\mathbb{C})$.

[1] Man beachte, dass $\Omega \setminus f^{-1}(\{0\})$ in dieser Situation nicht unbedingt offen sein muss, aber z_0 ist zumindest ein innerer Punkt. Wir können also wie gehabt über komplexe Differenzierbarkeit an der Stelle z_0 sprechen.

(ii) Sind P, Q komplexe Polynome der Form Gl. (1.6), dann gehört die *rationale Funktion* $\frac{P}{Q}$ zu $\mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \mathcal{N}_Q)$, wobei

$$\mathcal{N}_Q := \{z \in \mathbb{C} \mid Q(z) = 0\}$$

die Nullstellenmenge von Q bezeichnet.

Satz 1.16 (Kettenregel): *Seien $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ offen. Sind $f : \Omega_2 \to \mathbb{C}$ und $g : \Omega_1 \to \mathbb{C}$ Funktionen mit $g(\Omega_1) \subset \Omega_2$, sodass g an der Stelle $z_0 \in \Omega_1$ sowie f an der Stelle $g(z_0) \in \Omega_2$ komplex differenzierbar sind, dann ist auch*

$$f \circ g : \Omega_1 \to \mathbb{C} \quad , \quad z \mapsto f(g(z))$$

an der Stelle z_0 komplex differenzierbar mit

$$(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0))g'(z_0).$$

Beweis: Gemäß Lemma 1.11 existieren in $g(z_0)$ bzw. z_0 stetige Funktionen $\varphi : \Omega_1 \to \mathbb{C}$ und $\psi : \Omega_2 \to \mathbb{C}$ mit $\varphi(g(z_0) = f'(g(z_0))$ und $\psi(z_0) = g'(z_0)$, sodass

$$\begin{aligned} f(w) &= f(g(z_0)) + \varphi(w)(w - g(z_0)) && \forall\, w \in \Omega_2, \\ g(z) &= g(z_0) + \psi(z)(z - z_0) && \forall\, z \in \Omega_1. \end{aligned}$$

Damit gilt für alle $z \in \Omega_1$ (mit $w = g(z) \in \Omega_2$)

$$f(g(z)) = f(g(z_0)) + \varphi(g(z)) \underbrace{(g(z) - g(z_0))}_{=\psi(z)(z-z_0)} = f(g(z_0)) + \underbrace{\varphi(g(z))\psi(z)}_{=:\eta(z)}(z - z_0),$$

wobei $\eta : \Omega_1 \to \mathbb{C}$ in z_0 stetig ist mit

$$\eta(z_0) = \varphi(g(z_0))\psi(z_0) = f'(g(z_0))g'(z_0).$$

Nach Lemma 1.11 folgt, dass $f \circ g$ an der Stelle z_0 komplex differenzierbar ist mit der Ableitung $(f \circ g)'(z_0) = \eta(z_0) = f'(g(z_0))g'(z_0)$. ∎

Bemerkung 1.17: Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ reell partiell differenzierbar, dann sind die *Pompeiu-Wirtinger-Ableitungen* $\frac{\partial f}{\partial z}$ und $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$ definiert durch

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

- Man kann nachrechnen, dass für $m, n \in \mathbb{N}_0$

  $$\frac{\partial}{\partial z}(z^m \overline{z}^n) = m z^{m-1} \overline{z}^n$$

  und

  $$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(z^m \overline{z}^n) = n z^m \overline{z}^{n-1}$$

  gilt. Damit können $\frac{\partial f}{\partial z}$ und $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$ als partielle Ableitungen nach z bzw. $\overline{z}$ gesehen werden.

- Ferner lässt sich zeigen, dass eine reell total differenzierbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ genau dann auf Ω holomorph ist, wenn gilt

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = 0 \quad \text{für alle } z \in \Omega.$$

  In diesem Fall ist

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z) \quad \text{für alle } z \in \Omega,$$

  d. h. in diesem Sinne sind holomorphe Funktionen gerade diejenigen $f : \Omega \to \mathbb{C}$, die „nur von z und nicht von $\overline{z}$ abhängen“.

2. Komplexe Wegintegrale und der Cauchysche Integralsatz

Bereits in Bemerkung 1.5 haben wir verwendet: Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ offen, dann ist $f : \Omega \to \mathbb{C}$ in einem Punkt $x_0 \in \Omega$ reell partiell differenzierbar genau dann, wenn

$$\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f) : \Omega \to \mathbb{R}$$

reell partiell differenzierbar sind und es gilt dann

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\mathrm{Re}(f)\right)(x_0) + \mathrm{i}\left(\frac{\partial}{\partial x_0}\mathrm{Im}(f)\right)(x_0). \tag{2.1}$$

Wie üblich schreiben wir

$$\mathscr{C}^1(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f \text{ stetig partiell differenzierbar}\}.$$

Man rechnet leicht nach, dass Gl. (2.1) mit der Multiplikation auf $\mathbb{C}$ verträglich ist, d. h. sind $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ in einem Punkt $x_0 \in \Omega$ reell partiell differenzierbar, so ist auch

$$f \cdot g : \Omega \to \mathbb{C} \quad , \quad x \mapsto f(x)g(x)$$

im Punkt x_0 reell partiell differenzierbar mit

$$\frac{\partial (f \cdot g)}{\partial x_j}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)g(x_0) + f(x_0)\frac{\partial g}{\partial x_j}(x_0).$$

Analog zu Gl. (2.1) werden auch Integrale komplexer Funktionen definiert.

Im Folgenden sei $I = [a, b]$ mit $-\infty < a < b < \infty$ ein beliebiges kompaktes Intervall.

Definition 2.1: Ist $f : I \to \mathbb{C}$ stetig, dann sind auch $\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f) : I \to \mathbb{R}$ ebenfalls stetig und damit (Riemann)integrierbar. Wir setzen

$$\int_a^b f(t)\,dt := \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\,dt + \mathrm{i}\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\,dt\,. \tag{2.2}$$

Man überzeugt sich leicht davon, dass sich die gewohnten Rechenregeln für reelle (Riemann)Integrale auf den komplexen Fall übertragen. Insbesondere ist

$$\int_a^b \cdot\, dt : \mathscr{C}(I) \to \mathbb{C} \quad , \quad f \mapsto \int_a^b f(t)\,dt$$

eine stetige Linearform mit der Standardabschätzung

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \le |b-a| \max_{t \in I}|f(t)| = |b-a|\|f\|_I \quad \text{für alle } f \in \mathscr{C}(I).$$

Ferner haben wir:

Satz 2.2 („Dreiecksungleichung“): *Für alle stetigen Funktionen $f : I \to \mathbb{C}$ gilt:*

$$\left| \int_a^b f(t)\,dt \right| \le \int_a^b |f(t)|\,dt\,.$$

Beweis: Wähle $\varphi \in (-\pi, \pi]$ mit der Eigenschaft

$$\int_a^b f(t)\,dt = \left| \int_a^b f(t)\,dt \right| e^{\mathrm{i}\varphi}.$$

Dann gilt

$$\mathbb{R} \ni \left| \int_a^b f(t)\,dt \right| = e^{-\mathrm{i}\varphi} \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b e^{-\mathrm{i}\varphi} f(t)\,dt$$

und wir erhalten nach Übergang zum Realteil

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t)\,dt \right| &= \mathrm{Re}\Big(\int_a^b e^{-\mathrm{i}\varphi} f(t)\,dt \Big) \\ &= \int_a^b \underbrace{\mathrm{Re}(e^{\mathrm{i}\varphi} f(t))}_{\le |e^{-\mathrm{i}\varphi} f(t)| = |f(t)|} \,dt \\ &\le \int_a^b |f(t)|\,dt, \end{aligned}$$

wegen der Monotonie reeller Integrale. ■

Satz 2.3: *Sei $f : I \to \mathbb{C}$. Ist $F \in \mathscr{C}^1(I)$ eine* Stammfunktion *von f, d. h. $F'(t) = f(t)$ für alle $t \in I$ (mit einseitiger Differenzierbarkeit in den Randpunkten), dann gilt*

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Umgekehrt erhält man eine Stammfunktion von f durch

$$F : [a, b] \to \mathbb{C} \quad , \quad t \mapsto \int_a^t f(s)\,ds\,.$$

Beweis: Klar mit der reellen Fassung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. ■

Wir wollen nun allgemeiner Integrale der folgenden Form

$$\int_\gamma f(z)\,dz$$

für Wege $\gamma : I \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(I) \subset D$, und Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$ verstehen. Dies benötigt etwas Vorbereitung.

Definition 2.4: Sei $\gamma : I \to \mathbb{C}$ ein Weg (d. h. $\gamma \in \mathscr{C}(I)$). Wir nennen γ

(i) *geschlossen*, falls $\gamma(a) = \gamma(b)$ gilt.

(ii) *stetig differenzierbar* oder *glatt*, falls $\gamma \in \mathscr{C}^1(I)$.

(iii) *stückweise stetig differenzierbar* oder *stückweise glatt*, falls es eine Zerlegung

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$$

des Intervalls $I = [a, b]$ gibt, so dass

$$\gamma_j := \gamma|_{[t_{j-1}, t_j]} \in \mathscr{C}^1([t_{j-1}, t_j])$$

für $j = 1, \ldots, n$ gilt. In diesem Fall gilt $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n$.

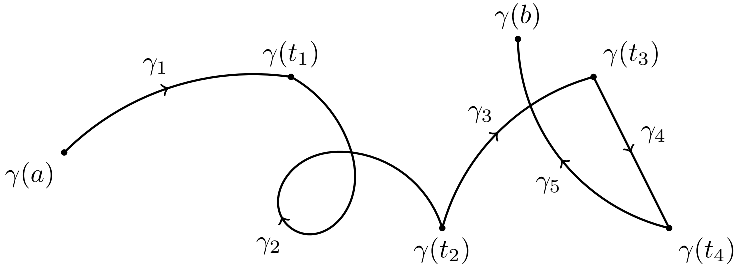


Abbildung 2.1.: Skizze eines stückweise glatten Weges.

Definition 2.5: (i) Sind $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{C}$ und $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{C}$ Wege mit $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$, dann definieren wir $\gamma_1 + \gamma_2$ durch

$$\gamma_1 + \gamma_2 : [a_1, b_1 + (b_2 - a_2)] \to \mathbb{C}$$

$$t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a_1, b_1] \\ \gamma_2(t - b_1 + a_2), & t \in [b_1, b_1 + (b_2 - a_2)] \end{cases}.$$

(ii) Sind $\gamma_j : [a_j, b_j] \to \mathbb{C}$ für $j = 1, \ldots, n$ Wege mit $\gamma_j(b_j) = \gamma_{j+1}(a_{j+1})$ für alle $j = 1, \ldots, n-1$, dann definieren wir den *Summenweg*

$$\gamma := \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n$$

rekursiv durch

$$\gamma = (\gamma_1 + \cdots + \gamma_{n-1}) + \gamma_n.$$

Bemerkung 2.6: Ein Weg $\gamma : I \to \mathbb{C}$ ist nichts anderes als eine *parametrisierte Kurve* im Sinne der Analysis II. Wir nennen die kompakte Menge

$$\gamma^* := \gamma(I) = \{\gamma(t) \mid t \in I\}$$

die *Spur von* γ. Damit

$$\gamma : I \to \mathbb{C} \quad \hat{=} \quad \text{Spur} + \text{Parametrisierung}.$$

Definition 2.7 (Kurvenintegral): Sei $\gamma : I \to \mathbb{C}$ ein glatter Weg und $f : D \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion mit $\gamma^* \subset D$. Dann setzen wir

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt\,.$$

Ist $\gamma : I \to \mathbb{C}$ stückweise glatt, dann gibt es eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ des Intervalls $I = [a,b]$, sodass die Teilwege $\gamma_j := \gamma|_{[t_{j-1},t_j]}$ für $j = 1,\ldots,n$ glatt sind. Wir definieren dann

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z)\,dz\,.$$

Dies ist von der speziellen Wahl der Zerlegung von I unabhängig.

Bemerkung 2.8: Man kann neben den Wegintegralen $\int_\gamma f(z)\,dz$ auch Integrale der Form

$$\int_D f(z)\,d\lambda(z) = \int_D f(x+\mathrm{i}y)\,dxdy,$$

wobei $d\lambda$ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{C}$ bezeichnet, und

$$\int_\gamma f(z)|dz| := \int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|\,dt$$

untersuchen. Diese spielen in der Funktionentheorie jedoch eine untergeordnete Rolle. Einen Spezialfall benötigen wir aber doch:

Definition 2.9: Ist $\gamma : I \to \mathbb{C}$ ein glatter Weg, dann ist die *Bogenlänge* von γ gegeben durch

$$L(\gamma) := \int_\gamma |dz| := \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt\,.$$

Ist γ stückweise glatt, dann setzen wir

$$L(\gamma) := \sum_{j=1}^n L(\gamma_j),$$

wobei $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n$ eine beliebige Zerlegung von γ in glatte Teilwege γ_j wie in Definition 2.7 ist. Der Wert $L(\gamma)$ ist auch hier von der speziellen Wahl der Zerlegung unabhängig.

Bemerkung 2.10: Man kann zeigen, dass für jeden glatten Weg γ gilt:

$$L(\gamma) = \sup_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ a=t_0<\cdots<t_n=b}} \sum_{j=1}^n |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|,$$

d. h. $L(\gamma)$ kann als (euklidische) Länge des Weges γ verstanden werden.

Beispiel 2.11: (i) Für zwei Punkte $z, w \in \mathbb{C}$ hat die Verbindungsstrecke, d. h. der Weg

$$\gamma_{z\to w} : [0,1] \to \mathbb{C} \quad , \quad t \mapsto z + t(w-z),$$

die Länge $L(\gamma_{z\to w}) = |w-z|$.

(ii) Der gegen den Uhrzeigersinn durchlaufene Rand der Kreisscheibe $D(z_0, r)$, d. h. der Weg

$$\gamma_{z_0,r,\circlearrowleft} : [0,2\pi] \to \mathbb{C} \quad , \quad t \mapsto z_0 + re^{\mathrm{i}t},$$

hat die Länge $L(\gamma_{z_0,r,\circlearrowleft}) = 2\pi r$.

Satz 2.12: *Wegintegrale sind invariant unter Parametertransformationen, die den „Durchlaufsinn“ des Weges erhalten, d. h. ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein stückweise glatter Weg und $f : D \to \mathbb{C}$ stetig mit der Eigenschaft $\gamma * \subset D$, dann gilt*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma\circ\varphi} f(z)\,dz$$

für jede stetig differenzierbare Funktion $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ auf einem kompakten Intervall $[c,d]$, die $\varphi(c) = a$ und $\varphi(d) = b$ erfüllt[1].

Beweis: Sei $H : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion zu

$$h : [a,b] \to \mathbb{C} \quad , \quad s \mapsto f(\gamma(s))\gamma'(s).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)\,dz &= \int_c^d \overbrace{\underbrace{f(\gamma(\varphi(s)))\gamma'(\varphi(s))}_{=h(\varphi(s))}\varphi'(s)}^{=(H\circ\varphi)'(s)}\,ds \\
&= H(\varphi(d)) - H(\varphi(c)) \\
&= H(b) - H(a) \\
&= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt \\
&= \int_\gamma f(z)\,dz\,.
\end{aligned}$$

■

Bemerkung 2.13: Ist $\gamma : I \to \mathbb{C}$ stückweise glatt, dann ist die Abbildung

$$\int_\gamma \cdot\,dz : \mathscr{C}(\gamma^*) \to \mathbb{C} \quad , \quad f \mapsto \int_\gamma f(z)\,dz$$

[1] Dieser Satz wird oft nur für *orientierungserhaltende Parametertransformationen* $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ formuliert, für die neben $\varphi(c) = a$ und $\varphi(d) = b$ zusätzlich $\varphi'(s) > 0$ für alle $s \in [c,d]$ gefordert wird. Diese Einschränkung ist zwar geometrisch sinnvoll, für die Gültigkeit dieses Satzes aber - wie unser Beweis zeigt - nicht nötig.

ist linear und beschränkt mit

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le L(\gamma)\underbrace{\max_{z\in\gamma^*}|f(z)|}_{=:\|f\|_{\gamma^*}}$$

für alle $f \in \mathscr{C}(\gamma^*)$ (vgl. Aufgabe 1, Blatt 4).

Satz 2.14: *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig mit* (holomorpher) Stammfunktion *$F : \Omega \to \mathbb{C}$ (d. h. $F \in \mathcal{O}(\Omega), F' = f$), dann gilt für jeden stückweise glatten Weg $\gamma : I \to \Omega$:*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)), \tag{2.3}$$

insbesondere gilt für jeden geschlossenen, stückweise glatten Weg $\gamma : I \to \Omega$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0. \tag{2.4}$$

Beweis: Zunächst sei $\gamma : I \to \mathbb{C}$ mit $\gamma^* \subset \Omega$ glatt. Dann ist auch

$$\psi : I \to \mathbb{C} \quad , \quad t \mapsto F(\gamma(t))$$

ein glatter Weg mit

$$\psi'(t) = F'(\gamma(t))\gamma'(t) = f(\gamma(t))\gamma'(t)$$

(vgl. Aufgabe 5, Blatt 3). Nach Satz 2.2 gilt

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt \\ &= \int_a^b \psi'(t)\,dt \\ &= \psi(b) - \psi(a) \\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)),\end{aligned}$$

also folgt Gl. (2.3). Sei nun $\gamma : I \to \mathbb{C}$ mit $\gamma^* \subset \Omega$ stückweise glatt. Wähle eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$, sodass $\gamma_j = \gamma|_{[t_{j-1},t_j]}$ für $j = 1, \ldots, n$ glatt ist. Dann ist

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &= \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z)\,dz \\ &= \sum_{j=1}^n \big(F(\gamma(t_j)) - F(\gamma(t_{j-1}))\big) \\ &= F(\gamma(t_n)) - F(\gamma(t_0)) \\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).\end{aligned}$$

Ist γ geschlossen, so gilt $\gamma(b) = \gamma(a)$, also ist

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0.$$

∎

Bemerkung 2.15: Sei $\gamma : I \to \mathbb{C}$, $I = [a, b]$, ein Weg, dann nennen wir

$$-\gamma : I \to \mathbb{C} \quad , \quad t \mapsto \gamma(a + b - t)$$

den *Umkehrweg zu* γ. Ist γ (stückweise) glatt, dann ist auch $-\gamma$ (stückweise) glatt und wie im Beweis zu Satz 2.12 zeigt man, dass in diesem Fall

$$\int_{-\gamma} f(z)\, dz = -\int_{\gamma} f(z)\, dz$$

für alle stetigen Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$ gilt, wobei $(-\gamma)^* = \gamma^* \subset D$.

Unser Ziel ist es nun, zu zeigen, dass für „gewisse" Ω jedes $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ eine holomorphe Stammfunktion besitzt und damit nach Satz 2.14 die Bedingung Gl. (2.4) erfüllt. Darauf bauen wir die Funktionentheorie auf!

Definition 2.16: Seien z_1, z_2, z_3 beliebige Punkte in $\mathbb{C}$. Wir nennen die abgeschlossene und konvexe Menge

$$\Delta(z_1, z_2, z_3) := \{t_1 z_1 + t_2 z_2 + t_3 z_3 \mid t_1, t_2, t_3 \geq 0, t_1 + t_2 + t_3 = 1\}$$

das *von* z_1, z_2 *und* z_3 *aufgespannte Dreieck*. Falls keine Verwechslungen zu befürchten sind, schreiben wir einfach nur Δ statt $\Delta(z_1, z_2, z_3)$. Ferner nennen wir den stückweise glatten Weg

$$\langle z_1, z_2, z_3 \rangle := \gamma_{z_1 \to z_2} + \gamma_{z_2 \to z_3} + \gamma_{z_3 \to z_1}$$

den *Dreiecksweg zu* z_1, z_2 *und* z_3. Dieser ist geschlossen. Dieser parametrisiert offensichtlich den Rand von Δ, d. h.

$$\langle z_1, z_2, z_3 \rangle^* = \partial\Delta.$$

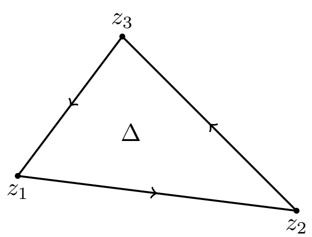


Abbildung 2.2.: Skizze eines Dreiecksweges.

Satz 2.17 (von Goursat, 1883/1884): *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt für beliebige $z_1, z_2, z_3 \in \Omega$ mit $\Delta = \Delta(z_1, z_2, z_3) \subset \Omega$, dass*

$$\int_{\langle z_1, z_2, z_3 \rangle} f(z)\, dz = 0.$$

Beweis: Wir konstruieren induktiv eine Folge $(\gamma^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ von Dreieckswegen

$$\gamma^{(n)} = \langle z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, z_3^{(n)} \rangle,$$

sodass gilt:

(i) $\gamma^{(0)} = \gamma = \langle z_1, z_2, z_3 \rangle$,

(ii) $\gamma^{(n+1)}$ ist einer der folgenden Dreieckswege:

$$\begin{aligned}
\gamma_1^{(n)} &= \left\langle \frac{z_1^{(n)} + z_2^{(n)}}{2}, z_2^{(n)}, \frac{z_2^{(n)} + z_3^{(n)}}{2} \right\rangle, \\
\gamma_2^{(n)} &= \left\langle \frac{z_2^{(n)} + z_3^{(n)}}{2}, z_3^{(n)}, \frac{z_1^{(n)} + z_3^{(n)}}{2} \right\rangle, \\
\gamma_3^{(n)} &= \left\langle \frac{z_1^{(n)} + z_3^{(n)}}{2}, z_1^{(n)}, \frac{z_1^{(n)} + z_2^{(n)}}{2} \right\rangle, \\
\gamma_4^{(n)} &= \left\langle \frac{z_1^{(n)} + z_2^{(n)}}{2}, \frac{z_2^{(n)} + z_3^{(n)}}{2}, \frac{z_1^{(n)} + z_3^{(n)}}{2} \right\rangle.
\end{aligned}$$

(iii) Es gilt

$$\left| \int_{\gamma^{(n)}} f(z)\, dz \right| \le 4 \left| \int_{\gamma^{(n+1)}} f(z)\, dz \right|.$$

Dies ist möglich, denn es gilt

$$\int_{\gamma^{(n)}} f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{\gamma_j^{(n)}} f(z)\, dz,$$

und damit, wenn wir $\gamma^{(n+1)}$ in (ii) so wählen, dass

$$\left| \int_{\gamma^{(n+1)}} f(z)\, dz \right| = \max_{j=1,2,3,4} \left| \int_{\gamma_j^{(n)}} f(z)\, dz \right|$$

erfüllt ist, gilt auch (iii).

Betrachte nun die zugehörigen Dreiecke

$$\Delta^{(n)} := \Delta(z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, z_3^{(n)}), \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Diese sind abgeschlossen (genauer kompakt) und erfüllen

$$\Delta = \Delta^{(0)} \supset \Delta^{(1)} \supset \Delta^{(2)} \supset \dots,$$

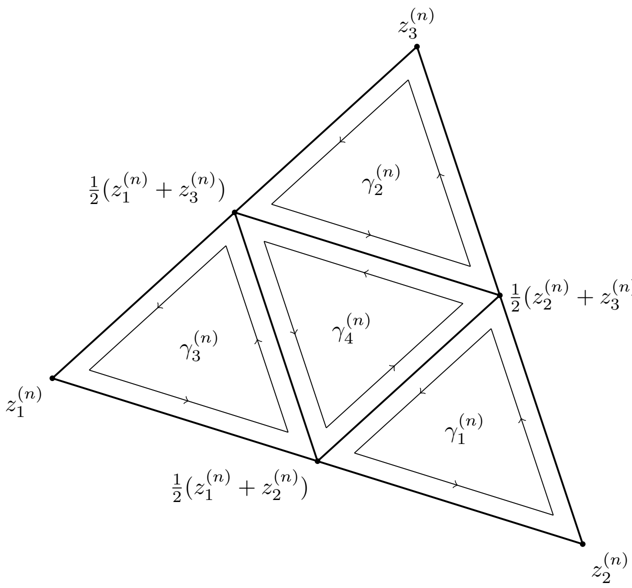


Abbildung 2.3.: Skizze der konstruierten Wege $\gamma_i^{(n)}$, $i = 1, \ldots, 4$.

sowie

$$\operatorname{diam}(\Delta^{(n)}) := \max_{z,w\in\Delta^{(n)}} |z-w| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Nach dem allgemeinen Intervallschachtelungsprinzip (Zusatzaufgabe, Blatt 4) gibt es einen (eindeutigen) Punkt

$$z_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta^{(n)} \subset \Omega.$$

Wegen $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ ist f komplex differenzierbar in z_0. Ist nun $\varepsilon > 0$, dann gibt es nach Bemerkung 1.3 ein $\delta > 0$ mit

$$\left| \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon \qquad \text{für alle } z \in D^{\bullet}(z_0,\delta)$$

und somit

$$\Big| f(z) - \big(f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0)\big) \Big| \le \varepsilon |z-z_0| \qquad \text{für alle } z \in D(z_0,\delta).$$

Zu δ wählen wir ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$, sodass

$$\Delta^{(n)} \subset D(z_0,\delta) \qquad \text{für alle } n \ge n_0.$$

Damit gilt für alle $n \ge n_0$ nach Bemerkung 2.15

$$\left| \int_{\gamma^{(n)}} f(z)\,dz - \underbrace{\int_{\gamma^{(n)}} \big(f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0)\big)\,dz}_{=0,\ \text{nach Satz 2.14}} \right|$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| \int_{\gamma^{(n)}} \Big(f(z) - \big(f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) \big) \Big) \, dz \right| \\
&\leq L(\gamma^{(n)}) \cdot \varepsilon \cdot \operatorname{diam}(\Delta^{(n)}) \\
&\leq \varepsilon L(\gamma^{(n)})^2.
\end{aligned}
$$

Andererseits gilt nach (iii)

$$
\left| \int_\gamma f(z)\, dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\gamma^{(n)}} f(z)\, dz \right|
$$

und wegen (ii) gilt ferner

$$
L(\gamma^{(n)}) = 2^{-n} L(\gamma),
$$

sodass

$$
\left| \int_\gamma f(z)\, dz \right| \leq 4^n \varepsilon (2^{-n} L(\gamma))^2 = L(\gamma)^2 \varepsilon.
$$

Da ε beliebig war, haben wir somit wie gewünscht

$$
\int_\gamma f(z)\, dz = 0.
$$

■

Definition 2.18: Sei $\varnothing \neq G \subseteq \mathbb{C}$ offen. Wir nennen G *sternförmig*, falls es einen Punkt $z_0 \in G$ gibt, sodass gilt:

$$
\gamma^*_{z_0 \to z} = \{ z_0 + t(z - z_0) \mid t \in [0,1] \} \subset G \qquad \text{für alle } z \in G.
$$

In diesem Fall nennen wir z_0 ein *Zentrum* von G.

Ein sternförmiges G ist offensichtlich zusammenhängend, also ein Gebiet. Wir nennen solche G deshalb auch *Sterngebiete*.

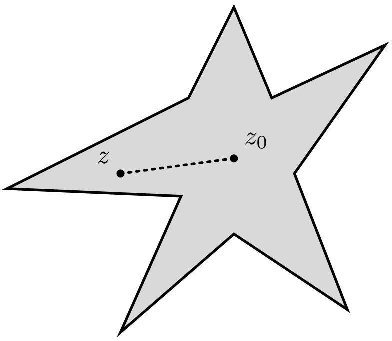


Abbildung 2.4.: Skizze eines Sterngebietes.

Satz 2.19 (Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete): *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Sterngebiet und $z_0 \in G$ ein Zentrum von G. Dann besitzt jede holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Stammfunktion, und es gilt*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0$$

für jeden geschlossenen, stückweise glatten Weg $\gamma : I \to G$.

Beweis: Wir definieren $F : G \to \mathbb{C}$ durch

$$F(z) := \int_{\gamma_{z_0 \to z}} f(\zeta)\, d\zeta \qquad \text{für alle } z \in G.$$

Wir haben zu zeigen, dass F an jeder Stelle $z \in G$ komplex differenzierbar ist mit der Ableitung $F'(z) = f(z)$. Sei $z \in G$ gegeben. Wir wählen $\delta_0 > 0$ mit $D(z, \delta_0) \subseteq G$. Für alle $w \in D^\bullet(z, \delta_0)$ gilt dann, dass $\Delta(z_0, z, w) \subset G$ und somit nach Satz 2.17

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\langle z, z_0, w\rangle} f(\zeta)\, d\zeta \\ &= \underbrace{\int_{\gamma_{z_0 \to z}} f(\zeta)\, d\zeta}_{=F(z)} + \int_{\gamma_{z \to w}} f(\zeta)\, d\zeta + \underbrace{\int_{\gamma_{w \to z_0}} f(\zeta)\, d\zeta}_{=-F(w)}, \end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass $\gamma_{w \to z_0} = -\gamma_{z_0 \to w}$ und damit nach Bemerkung 2.15

$$\int_{\gamma_{w \to z_0}} f(\zeta)\, d\zeta = -\int_{\gamma_{z_0 \to w}} f(\zeta)\, d\zeta = -F(w)$$

gilt.

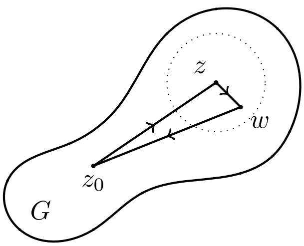


Abbildung 2.5.: Skizze zur Situation im Beweis.

Es folgt:

$$\begin{aligned} F(w) - F(z) &= \int_{\gamma_{z \to w}} f(\zeta)\, d\zeta \\ &= \int_{\gamma_{z \to w}} \big(f(\zeta) - f(z)\big)\, d\zeta + f(z)(w - z), \qquad \text{da} \quad \int_{\gamma_{z \to w}} d\zeta = w - z, \end{aligned}$$

also
$$\frac{F(w)-F(z)}{w-z} - f(z) = \frac{1}{w-z}\int_{\gamma_{z\to w}} \big(f(\zeta)-f(z)\big)\,d\zeta\,.$$
Wegen Bemerkung 1.3 gilt
$$\begin{aligned}\left|\frac{F(w)-F(z)}{w-z} - f(z)\right| &\le \underbrace{\frac{1}{|w-z|}L(\gamma_{z\to w})}_{=1 \text{ nach Beispiel 2.11(i)}}\ \|f-f(z)\|_{\gamma^*_{z\to w}} \\ &= \max_{t\in[0,1]}|f(z+t(w-z))-f(z)|.\end{aligned}$$

Da f an der Stelle z_0 stetig ist nach Korollar 1.12, gibt es für alle $\varepsilon>0$ ein $0<\delta<\delta_0$ mit
$$|f(w')-f(z)|<\varepsilon \qquad \text{für alle } w'\in D(z,\delta).$$
Damit gilt nun für alle $w\in D^\bullet(z,\delta)$
$$\begin{aligned}\left|\frac{F(z)-F(w)}{z-w} - f(z)\right| &\le \max_{t\in[0,1]}|f(\underbrace{z+t(w-z)}_{=w'\in D(z,\delta)})-f(z)| \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

Also ist F an der Stelle z_0 komplex differenzierbar mit $F'(z)=f(z)$. Der Zusatz folgt nun aus Satz 2.14. ■

Satz 2.20 (Zentrierungslemma): *Seien $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ offen, $z\in\Omega$ und $g\in\mathcal{O}(\Omega\setminus\{z\})$. Weiter seien $z_0\in\Omega$ und $r_0>0$ gegeben mit*
$$z\in D(z_0,r_0)\subset\overline{D(z_0,r_0)}\subset\Omega.$$
Dann gilt für alle $r>0$ mit $\overline{D(z,r)}\subset D(z_0,r_0)$
$$\int_{\gamma_{z_0,r_0,\circlearrowleft}} g(\zeta)\,d\zeta = \int_{\gamma_{z,r,\circlearrowleft}} g(\zeta)\,d\zeta\,.$$

Beweis: Wir wählen $r_0'>r_0$, sodass
$$\overline{D(z_0,r_0)}\subset D(z_0,r_0')=:D\subset\Omega.$$

Nun ist
$$\gamma_{z_0,r_0,\circlearrowleft}=\gamma_1+\gamma_2 \quad , \quad \gamma_{z,r,\circlearrowleft}=-(\gamma_3+\gamma_4),$$
erkläre außerdem
$$\gamma:=\gamma_1+\alpha+\gamma_3+\beta \quad , \quad \tilde\gamma:=\gamma_2-\beta+\gamma_4-\alpha$$
gemäß Abbildung 2.6. Da $D\setminus\{z+t(a-z)\mid t\in[0,1]\}$ sternförmig ist, gilt gemäß Satz 2.19
$$\int_\gamma g(\zeta)\,d\zeta=0.$$

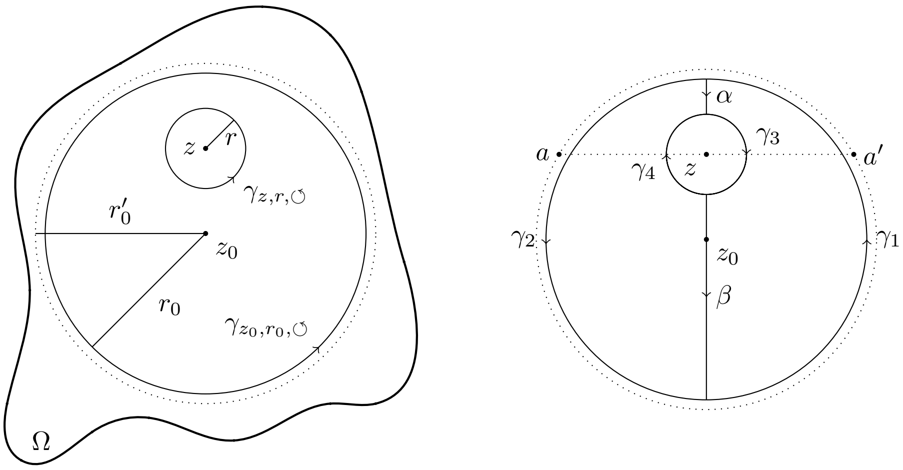


Abbildung 2.6.: Skizze zu den definierten Kreisscheiben.

Analog sieht man, dass

$$\int_{\tilde{\gamma}} g(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

Damit folgt, dass

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma} g(\zeta)\, d\zeta + \int_{\tilde{\gamma}} g(\zeta)\, d\zeta \\ &= \int_{\gamma_{z_0,r_0,\circlearrowleft}} g(\zeta)\, d\zeta - \int_{\gamma_{z,r,\circlearrowleft}} g(\zeta)\, d\zeta\,. \end{aligned}$$

■

Korollar 2.21: *Ist g in der Situation von Satz 2.20 in einer Umgebung von z beschränkt, so gilt*

$$\int_{\gamma_{z_0,r_0,\circlearrowleft}} g(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

Beweis: Nach Voraussetzung gibt es $\varepsilon > 0$ mit

$$M := \sup_{\zeta \in D(z,\varepsilon)} |g(\zeta)| < \infty.$$

Wenden wir Satz 2.20 auf $0 < r < \varepsilon$ an, so folgt

$$\left| \int_{\gamma_{z_0,r_0,\circlearrowleft}} g(\zeta)\, d\zeta \right| = \left| \int_{\gamma_{z,r,\circlearrowleft}} g(\zeta)\, d\zeta \right| \leq 2\pi r M \xrightarrow{r \searrow 0} 0,$$

also muss

$$\int_{\gamma_{z_0,r_0,\circlearrowleft}} g(\zeta)\, d\zeta = 0$$

gelten, wie behauptet. ■

Satz 2.22 (Cauchysche Integralformel für Kreisscheiben, Cauchy (1831)): *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Dann gilt für alle $z_0 \in \Omega$ und alle $r_0 > 0$ mit $\overline{D(z_0, r_0)} \subset \Omega$, dass*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_{z_0, r_0, \circlearrowleft}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta \qquad \textit{für alle } z \in D(z_0, r_0). \tag{2.5}$$

Beweis: Für festes $z \in D(z_0, r_0)$ ist

$$g : \Omega \setminus \{z\} \to \mathbb{C} \quad , \quad \zeta \mapsto \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}$$

holomorph und wegen

$$\lim_{\zeta \to z} g(\zeta) = f'(z)$$

in einer Umgebung von z beschränkt. Laut Korollar 2.21 gilt also für $\gamma := \gamma_{z_0, r_0, \circlearrowleft}$

$$0 = \int_\gamma g(\zeta) \, d\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - f(z) \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} \, d\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - 2\pi \mathrm{i} f(z),$$

wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, dass nach Satz 2.20 und Aufgabe 2 (a) von Blatt 4

$$\int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} \, d\zeta = \int_{\gamma_{z, r, \circlearrowleft}} \frac{1}{\zeta - z} \, d\zeta = 2\pi \mathrm{i}$$

gilt. Damit erhalten wir schließlich die behauptete Formel. ■

Bemerkung 2.23: Nach Aufgabe 4, Blatt 4 ist für $\gamma := \gamma_{z_0, r_0, \circlearrowleft}$ die Funktion

$$\widetilde{f|_{\gamma^*}} : D(z_0, r_0) \to \mathbb{C} \quad , \quad z \mapsto \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta$$

holomorph mit Ableitung

$$\widetilde{f|_{\gamma^*}}'(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \, d\zeta \, .$$

Da aber $f|_{D(z_0, r_0)} = \widetilde{f|_{\gamma^*}}$ nach Gl. (2.5), folgt

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \, d\zeta \qquad \text{für alle } z \in D(z_0, r_0). \tag{2.6}$$

Insbesondere ist f' auf $D(z_0, r_0)$ stetig und sogar Lipschitz-stetig auf $D(z_0, r)$ für jedes $0 < r < r_0$, denn es gilt

$$f'(z_1) - f'(z_2) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma f(\zeta) \left[\frac{1}{(\zeta - z_1)^2} - \frac{1}{(\zeta - z_2)^2} \right] d\zeta,$$

wobei wir den Integranden umformen können zu

$$\frac{1}{(\zeta - z_1)^2} - \frac{1}{(\zeta - z_2)^2} = \frac{(\zeta - z_2)^2 - (\zeta - z_1)^2}{(\zeta - z_1)^2 (\zeta - z_2)^2}$$

$$= \frac{((\zeta - z_2) + (\zeta - z_1))(z_1 - z_2)}{(\zeta - z_1)^2(\zeta - z_2)^2}$$

und die auftretenden Terme durch $r_0 - r < |\zeta - z_i| < 2r_0$ für $i = 1, 2$ abschätzen können; siehe hierzu Abbildung 2.7. Mit Bemerkung 2.13 sehen wir also, dass

$$\begin{aligned} |f'(z_1) - f'(z_2)| &\leq \frac{1}{2\pi} L(\gamma) \|f\|_{\gamma^*} \frac{4r_0}{(r_0 - r)^4} |z_1 - z_2| \\ &= \left(\frac{4r_0^2}{(r_0 - r)^4} \|f\|_{\gamma^*} \right) |z_1 - z_2|. \end{aligned}$$

Jede holomorphe (d. h. komplex differenzierbare) Funktion ist also automatisch stetig komplex differenzierbar.

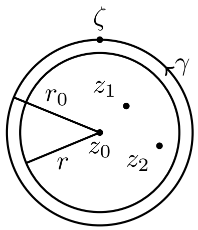


Abbildung 2.7.: Skizze zur Situation in Bemerkung 2.23.

Satz 2.24: *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist auch $f' : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Insbesondere gilt:*

$$\mathcal{O}(\Omega) \subset \mathscr{C}^\infty(\Omega).$$

Beweis: Mit Gl. (2.6) aus Bemerkung 2.23 folgern wir, dass

$$f'(z) = -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma f(\zeta) K_z'(\zeta)\, d\zeta \qquad \text{mit} \quad K_z(\zeta) := \frac{1}{\zeta - z}$$

und, indem wir den Integranden gemäß $f(\zeta)K_z'(\zeta) = (fK_z)'(\zeta) - f'(\zeta)K_z(\zeta)$ umformen, dass

$$\begin{aligned} f'(z) &= -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \underbrace{\int_\gamma (fK_z)'(\zeta)\, d\zeta}_{=0, \text{ nach Satz 2.14}} - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma f'(\zeta) K_z(\zeta)\, d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma f'(\zeta) K_z(\zeta)\, d\zeta\,. \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{z - \zeta}\, d\zeta$$

für alle $z \in D(z_0, r_0)$.

Damit erfüllt f' die Formel in Gl. (2.6), ist also nach Aufgabe 4 von Blatt 4 holomorph auf $D(z_0, r_0)$. Da $z_0 \in \Omega$ beliebig vorgegeben war, folgt $f' \in \mathcal{O}(\Omega)$. Iterativ sehen wir, dass f sogar beliebig oft stetig komplex differenzierbar ist und nach Satz 1.8 somit auch beliebig oft stetig reell partiell differenzierbar ist, d. h.

$$\mathcal{O}(\Omega) \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathscr{C}^k(\Omega) = \mathscr{C}^\infty(\Omega).$$

■

Satz 2.25 (verallgemeinerte Cauchysche Integralformel für Kreisscheiben): *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Dann gilt für alle $z_0 \in \Omega, r_0 > 0$ mit $\overline{D(z_0, r_0)} \subset \Omega$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$*

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_{z_0, r_0, \circlearrowleft}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} \, d\zeta \qquad \text{für alle } z \in D(z_0, r_0).$$

Beweis (Induktion nach k): Wir setzen wie bisher $\gamma = \gamma_{z_0, r_0, \circlearrowleft}$. Der Induktionsanfang $k = 0$ ist Satz 2.22. Für den Induktionsschritt $k \to k + 1$ wenden wir die Induktionsvoraussetzung auf die nach Satz 2.24 holomorphe Funktion $f' : \Omega \to \mathbb{C}$ an und erhalten

$$\begin{aligned}
f^{(k+1)}(z) &= (f')^{(k)}(z) \\
&= \frac{k'}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} \, d\zeta \\
&= \frac{k!}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma f(\zeta) K_z(\zeta) \, d\zeta \qquad \text{mit} \quad K_z(\zeta) := \frac{1}{(\zeta - z)^{k+1}} \\
&= -\frac{k!}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma f(\zeta) K_z'(\zeta) \, d\zeta \\
&= \frac{(k+1)!}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{1}{(\zeta - z)^{k+2}} \, d\zeta
\end{aligned}$$

für alle $z \in D(z_0, r_0)$, wobei wir im vorletzten Schritt erneut die Umformung $f(\zeta)K_z(\zeta) = (fK_z)'(\zeta) - f(\zeta)K_z'(\zeta)$ zusammen mit Satz 2.14 verwendet haben. ■

Satz 2.26 (Cauchysche Abschätzungen): *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Für alle $z_0 \in \Omega$, $r_0 > 0$ mit $\overline{D(z_0, r_0)} \subset \Omega$ und $k \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$|f^{(k)}(z)| \leq k! \frac{r_0}{(r_0 - |z - z_0|)^{k+1}} \|f\|_{\partial D(z_0, r_0)}$$

für alle $z \in D(z_0, r_0)$.

Beweis: Mit Bemerkung 2.13 folgt dies aus Satz 2.25, denn

$$|f^k(z)| = \frac{k!}{2\pi} \left| \int_{\gamma_{z_0, r_0, \circlearrowleft}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} \, d\zeta \right|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{k!}{2\pi} L(\gamma_{z_0,r_0,\circlearrowleft}) \max_{|\zeta - z_0| = r_0} \left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} \right| \\
&\leq k! \frac{r_0}{(r_0 - |z - z_0|)^{k+1}} \|f\|_{\partial D(z_0,r_0)},
\end{aligned}
$$

wobei wir verwendet haben, dass

$$
\left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} \right| \leq \frac{|f(\zeta)|}{(r_0 - |z - z_0|)^{k+1}}
$$

für alle $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\zeta - z_0| = r_0$ gilt. ■

3. Erste Fundamentalsätze über holomorphe Funktionen

In diesem Kapitel tragen wir einige erste wichtige Eigenschaften holomorpher Funktionen zusammen, die sich aus dem bisher Gezeigten folgern lassen.

I. Satz von Liouville

In diesem Abschnitt untersuchen wir $\mathcal{O}(\mathbb{C})$, also diejenigen holomorphen Funktionen, die auf ganz $\mathbb{C}$ definiert sind.

Definition 3.1: Eine *ganze Funktion* ist eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Für ganze Funktionen gilt nun der folgende, sehr bemerkenswerte Satz.

Satz 3.2 (von Liouville, 1847 / Cauchy, 1844): *Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

Beweis: Wir setzen

$$M := \sup_{\zeta \in \mathbb{C}} |f(\zeta)| < \infty.$$

Sei nun $z \in \mathbb{C}$ gegeben. Nach Satz 2.26 (mit $z = z_0$) gilt für alle $r_0 > 0$, dass

$$|f'(z)| \le \frac{r_0}{r_0^2} \|f\|_{\partial D(z_0, r_0)} \le \frac{1}{r_0} \cdot M \overset{r_0 \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Damit gilt $f'(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$, also muss f nach Aufgabe 1 (ii) auf Blatt 2 konstant sein. ∎

Dieser wichtige Satz hat zahlreiche Anwendungen. Unter anderem erhalten wir:

Satz 3.3 (Fundamentalsatz der Algebra): *Jedes komplexe Polynom der Form*

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

mit $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ und $a_n \neq 0$ besitzt eine Nullstelle.

Beweis: Wir wählen $r > 0$, sodass gilt

$$|a_{n-1}| \frac{1}{r} + \cdots + |a_1| \frac{1}{r^{n-1}} + |a_0| \frac{1}{r^n} < \frac{1}{2} |a_n|.$$

Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > r$ haben wir somit

$$|z^{-n} P(z)| = \left| a_n + a_{n-1} \frac{1}{z} + \cdots + a_1 \frac{1}{z^{n-1}} + a_0 \frac{1}{z^n} \right|$$

$$\geq |a_n| - \underbrace{\left| a_{n-1}\frac{1}{z} + \cdots + a_1\frac{1}{z^{n-1}} + a_0\frac{1}{z^n}\right|}_{\leq |a_{n-1}|\frac{1}{r} + \cdots + |a_1|\frac{1}{r^{n-1}} + |a_0|\frac{1}{r^n} < \frac{1}{2}|a_n|}$$
$$> \frac{1}{2}|a_n|.$$

Es gilt also für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > r$, dass

$$|P(z)| \geq \frac{1}{2}|a_n|r^n.$$

Wir nehmen nun an, P hätte keine Nullstelle. Dann würde $\frac{1}{P} \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ nach den Rechenregeln in Satz 1.13 gelten und unsere obigen Überlegungen würden

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \left|\frac{1}{P(z)}\right| \leq \max\left\{\frac{2}{|a_n|r^n}, \left\|\frac{1}{P}\right\|_{\overline{D(0,r)}}\right\}$$

liefern. Nach Satz 3.2 müsste also $\frac{1}{P}$ und damit P konstant sein, ein Widerspruch. ∎

II. Die Mittelwerteigenschaft und das Maximumprinzip

Das Maximumprinzip ist eines der wichtigsten Werkzeuge im Umgang mit holomorphen Funktionen, es ist jedoch nicht nur auf diesen Fall beschränkt. Vielmehr gilt es für die Klasse aller Funktionen, die die sogenannte Mittelwerteigenschaft besitzen.

Definition 3.4: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig. Wir sagen

„*f hat auf Ω die Mittelwerteigenschaft*“,

falls für alle $z_0 \in \Omega$ und $r_0 > 0$ mit $\overline{D(z_0, r_0)} \subset \Omega$ gilt:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + r_0 e^{\mathrm{i}t})\,dt\,. \tag{3.1}$$

Der nachfolgende Satz garantiert nun, dass alle in diesem Abschnitt gemachten Aussagen über Funktionen, die die Mittelwerteigenschaft besitzen, insbesondere für holomorphe Funktionen gelten.

Satz 3.5: *Ist $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, dann haben $f, \overline{f}, \mathrm{Re}(f)$ und $\mathrm{Im}(f)$ die Mittelwerteigenschaft auf Ω.*

Beweis: Nach Satz 2.22 gilt (für $z = z_0$) mit $\gamma := \gamma_{z_0,r_0,\circlearrowleft}$

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\,d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z_0}\gamma'(t)\,dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r_0 e^{\mathrm{i}t})}{(z_0 + r_0 e^{\mathrm{i}t}) - z_0} (\mathrm{i} r_0 e^{\mathrm{i}t})\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r_0 e^{\mathrm{i}t})\, dt,
\end{aligned}
$$

d. h. f besitzt die Mittelwerteigenschaft auf Ω. Durch Anwenden von $\overline{(\cdot)}$, $\mathrm{Re}(\cdot)$ und $\mathrm{Im}(\cdot)$ auf beiden Seiten von Gl. (3.1) folgt, dass auch $\overline{f}$, $\mathrm{Re}(f)$ und $\mathrm{Im}(f)$ die Mittelwerteigenschaft auf Ω haben. ■

Satz 3.6 (Maximumprinzip, lokale Form): *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, die die Mittelwerteigenschaft auf Ω hat. Besitzt $|f|$ in einem Punkt $z_0 \in \Omega$ eine lokale Maximumstelle, d. h.*

$$
\exists\, \varepsilon > 0 \;\; \forall\, z \in D(z_0, \varepsilon) : \quad |f(z)| \le |f(z_0)|, \tag{3.2}
$$

dann ist f in einer Umgebung von z_0 konstant.

Beweis: Sei $z_0 \in \Omega$ eine lokale Maximumstelle von $|f|$. Wir wählen $\varphi \in (-\pi, \pi]$ mit $f(z_0) = |f(z_0)| e^{\mathrm{i}\varphi}$. Nach Gl. (3.2) gilt nun für alle $0 \le r < \varepsilon$, mit ε wie in Gl. (3.2),

$$
f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{\mathrm{i}t})\, dt\,.
$$

Multiplikation mit $e^{-\mathrm{i}\varphi}$ liefert zunächst

$$
|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}\varphi} f(z_0 + r e^{\mathrm{i}\varphi})\, dt
$$

und damit, nach Übergang zum Realteil,

$$
|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\big(e^{\mathrm{i}\varphi} f(z_0 + r e^{\mathrm{i}\varphi})\big)\, dt
$$

Wir erhalten damit

$$
\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{\Big(|f(z_0)| - \underbrace{\mathrm{Re}\big(e^{\mathrm{i}\varphi} f(z_0 + r e^{\mathrm{i}t}\big)}_{\le |f(z_0 + r e^{\mathrm{i}t})| \overset{3.2}{\le} |f(z_0)|} \Big)}_{\ge 0} dt = 0,
$$

woraus sich wegen der Stetigkeit des Integranden schließlich

$$
\mathrm{Re}\big(e^{\mathrm{i}\varphi} f(z_0 + r e^{\mathrm{i}t})\big) = |f(z_0)| \qquad \text{für alle } t \in [0, 2\pi]
$$

ergibt. Für alle $t \in [0, 2\pi]$ gilt somit

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}\big(e^{\mathrm{i}\varphi} f(z_0 + r e^{\mathrm{i}t})\big)^2 &= |f(z_0)|^2 \\
&\overset{3.2}{\ge} |f(z_0 + r e^{\mathrm{i}t})|^2 \\
&= |e^{\mathrm{i}\varphi} f(z_0 + r e^{\mathrm{i}t})|^2
\end{aligned}
$$

$$= \operatorname{Re}\big(e^{-\mathrm{i}\varphi} f(z_0 + re^{\mathrm{i}t})\big)^2 + \operatorname{Im}\big(e^{-\mathrm{i}\varphi} f(z_0 + re^{\mathrm{i}t})\big)^2.$$

Es muss also

$$\operatorname{Im}(e^{-\mathrm{i}\varphi} f(z_0 + re^{\mathrm{i}t})) = 0 \qquad \text{für alle } t \in [0, 2\pi]$$

und damit

$$|f(z_0)| = \operatorname{Re}\big(e^{-\mathrm{i}t} f(z_0 + re^{\mathrm{i}t})\big) = e^{-\mathrm{i}\varphi} f(z_0 + re^{\mathrm{i}t}) \qquad \text{für alle } t \in [0, 2\pi]$$

gelten. Zusammenfassend haben wir also

$$f(z_0) = |f(z_0)| e^{\mathrm{i}\varphi} = f(z_0 + re^{\mathrm{i}t}) \qquad \text{für alle } t \in [0, 2\pi] \text{ und } 0 \leq r < \varepsilon,$$

also $f(z_0) = f(z)$ für alle $z \in D(z_0, \varepsilon)$. ■

Satz 3.7 (Maximumprinzip, globale Form): *Sei $\varnothing \neq G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, die auf G die Mittelwerteigenschaft hat. Dann gilt*

$$\forall\, z \in G: \quad |f(z)| \leq \|f\|_{\partial G} = \max_{\zeta \in \partial G} |f(\zeta)|. \tag{3.3}$$

Gibt es ein $z_0 \in G$ mit $|f(z_0)| = \|f\|_{\partial G}$, dann ist f auf $\overline{G}$ konstant.

Beweis: Da $\overline{G}$ kompakt ist, gibt es ein $z_0 \in \overline{G}$ mit

$$|f(z_0)| = \|f\|_{\overline{G}}.$$

Wir betrachten die Menge

$$A := \{z \in G \mid |f(z)| = |f(z_0)|\}.$$

Diese ist in $(G, d_{|\cdot|}|_{G \times G})$

- abgeschlossen, da f stetig ist, und
- offen, nach der lokalen Form des Maximumprinzips (Satz 3.6).

Da G zusammenhängend ist, gilt also entweder $A = \varnothing$ oder $A = G$.

Fall 1: $A = \varnothing$
In diesem Fall gilt $z_0 \notin G$ (da sonst $z_0 \in A$), also $z_0 \in \overline{G} \setminus G = \partial G$. Wir haben also

$$\|f\|_{\overline{G}} = |f(z_0)| = \|f\|_{\partial G}$$

und deshalb

$$\forall\, z \in G: \quad |f(z)| \leq \|f\|_{\overline{G}} = \|f\|_{\partial G}.$$

Fall 2: $A = G$
In diesem Fall gilt nach Definition der Menge A, dass

$$\forall\, z \in G: \quad |f(z)| = |f(z_0)| = \|f\|_{\overline{G}},$$

und somit, wegen der Stetigkeit von f auf $\overline{G}$, dass

$$\forall\, z \in \overline{G}: \quad |f(z)| = \|f\|_{\overline{G}}.$$

Weil $\partial G \neq \varnothing$ gilt, erhalten wir damit

$$\|f\|_{\overline{G}} = \|f\|_{\partial G},$$

sodass sich schließlich

$$\forall\, z \in G: \quad |f(z)| = \|f\|_{\overline{G}} = \|f\|_{\partial G}$$

ergibt.

In beiden Fällen gilt also $\|f\|_{\overline{G}} = \|f\|_{\partial G}$ und Gl. (3.3).

Gibt es nun ein $z_0 \in G$ mit $|f(z_0)| = \|f\|_{\partial G}$, dann ist

$$B := \{z \in G \mid f(z) = f(z_0)\}$$

nicht leer (wegen $z_0 \in B$) und in $(G, d_{|\cdot|}|_{G\times G})$

- abgeschlossen, da f stetig ist, und
- offen, wegen der lokalen Form des Maximumprinzips (Satz 3.6).

Da G zusammenhängend ist, folgt somit $B = G$, d. h. f ist auf G und damit (wegen der Stetigkeit von f) auch auf $\overline{G}$ konstant. ■

III. Der Satz von Morera

In Kapitel 2 haben wir den Cauchyschen Integralsatz (Satz 2.19) für Sterngebiete bewiesen, indem wir mit dem Satz von Goursat (Satz 2.17) zu jeder holomorphen Funktion auf einem solchen Gebiet eine globale Stammfunktion konstruiert haben. Da wir inzwischen wissen, dass Ableitungen holomorpher Funktionen selber wieder holomorph sind (Satz 2.24), lässt sich diese Argumentation nun zu einer Charakterisierung holomorpher Funktionen ausbauen. Auf offenen Mengen, die keine Sterngebiete sind, müssen wir hierfür die Forderung der globalen Existenz einer holomorphen Stammfunktion durch eine lokale Version ersetzen.

Genauer gilt der folgende Satz.

Satz 3.8 (von Morera, 1886): *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig. Dann sind äquivalent:*

(i) *Für jedes $z \in \Omega$ und jedes $r > 0$ mit $D(z,r) \subset \Omega$ besitzt f eine holomorphe Stammfunktion auf $D(z,r)$,*

(ii) *Für jedes $z \in \Omega$ gibt es ein $r > 0$ mit $D(z,r) \subset \Omega$, sodass f auf $D(z,r)$ eine holomorphe Stammfunktion besitzt.*

(iii) $f \in \mathcal{O}(\Omega)$,

(iv) *Für alle $z_1, z_2, z_3 \in \Omega$ mit $\Delta(z_1, z_2, z_3) \subset \Omega$ gilt*

$$\int_{\langle z_1, z_2, z_3\rangle} f(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): Trivial.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sei $z \in \Omega$ beliebig vorgegeben. Nach Voraussetzung finden wir dann ein $r > 0$ mit $D(z,r) \subseteq \Omega$ und ein $F \in \mathcal{O}(D(z,r))$ mit der Eigenschaft $F' = f|_{D(z,r)}$. Gemäß Satz 2.24 gilt damit $f|_{D(z,r)} \in \mathcal{O}(D(z,r))$. Weil nun Holomorphie auf Ω (als komplexe Differenzierbarkeit in jedem Punkt $z \in \Omega$) eine lokale Eigenschaft ist, folgt $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ und somit (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Dies ist die Aussage des Satzes von Goursat (Satz 2.17).

(iv) $\Rightarrow$ (i): Wie in Satz 2.19 sieht man, dass die Funktion

$$F : D(z,r) \to \mathbb{C} \quad , \quad w \mapsto \int_{\gamma_{z \to w}} f(\zeta)\, d\zeta$$

auf dem Sterngebiet $D(z,r)$ eine holomorphe Stammfunktion zu f darstellt. ■

4. Folgen und Reihen holomorpher Funktionen

Definition 4.1: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine Folge $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ stetiger Funktionen $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt

(i) *Cauchy-Folge bezüglich der kompakten Konvergenz auf* Ω, falls für jede kompakte Teilmenge $K \subset \Omega$ die Folge $(f_n|_K)_{n=1}^{\infty}$ eine gleichmäßige Cauchy-Folge ist, d. h.

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N \in \mathbb{N}\, \forall\, n, m \geq N : \quad \|f_n - f_m\|_K = \max_{z \in K} |f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon,$$

(ii) *kompakt konvergent gegen* $f : \Omega \to \mathbb{C}$, falls für jede kompakte Teilmenge $K \subset \Omega$ die Folge $(f_n|_K)_{n=1}^{\infty}$ gleichmäßig gegen $f|_K$ konvergiert, d. h.

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N \in \mathbb{N}\, \forall\, n \geq N : \quad \|f_n - f\|_K < \varepsilon.$$

Lemma 4.2: *Sei* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *offen und* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *eine Folge in* $\mathscr{C}(\Omega)$. *Dann gelten:*

(i) $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *ist genau dann eine Cauchy-Folge bzgl. der kompakten Konvergenz auf* Ω, *wenn* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *lokal eine gleichmäßige Cauchy-Folge ist (d. h., für jedes* $z \in \Omega$ *gibt es ein* $r > 0$ *mit der Eigenschaft* $\overline{D(z,r)} \subset \Omega$, *sodass* $(f_n|_{\overline{D(z,r)}})_{n=1}^{\infty}$ *eine gleichmäßige Cauchy-Folge ist).*

Analog ist $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *genau dann auf* Ω *kompakt konvergent gegen eine Funktion* $f : \Omega \to \mathbb{C}$, *wenn* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *lokal gleichmäßig gegen* f *konvergiert (d. h., für jedes* $z \in \Omega$ *gibt es ein* $r > 0$ *mit der Eigenschaft* $\overline{D(z,r)} \subset \Omega$, *sodass* $(f_n|_{\overline{D(z,r)}})_{n=1}^{\infty}$ *gleichmäßig gegen* $f|_{\overline{D(z,r)}}$ *konvergiert).*

(ii) *Ist* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *eine Cauchy-Folge bzgl. der kompakten Konvergenz auf* Ω, *so konvergiert* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *kompakt auf* Ω *gegen eine stetige Funktion* $f : \Omega \to \mathbb{C}$.

(iii) *Ist* $\gamma : I \to \mathbb{C}$, $I = [a,b]$, *mit* $\gamma^* \subset \Omega$ *ein stückweise ein stückweise glatter Weg und konvergiert* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *kompakt gegen eine stetige Funktion* $f : \Omega \to \mathbb{C}$, *dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(\zeta)\, d\zeta = \int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta\,.$$

Beweis: Als Übung. ■

Wir zeigen nun, dass kompakte Konvergenz der „richtige" Konvergenzbegriff für $\mathcal{O}(\Omega) \subset \mathscr{C}(\Omega)$ ist.

Satz 4.3 (von Weierstraß, 1841): *Sei* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *offen und* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *eine Folge holomorpher Funktionen* $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$, *die eine Cauchy-Folge bzgl. kompakter Konvergenz auf* Ω *darstellt. Dann gilt:*

(i) *Die nach Lemma 4.2 (ii) stetige Grenzfunktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ist auf Ω holomorph.*

(ii) *Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt mit kompakter Konvergenz*

$$f_n^{(k)} \longrightarrow f^{(k)} \qquad \textit{für } n \to \infty.$$

Beweis: (i) Nach dem Satz von Morera (Satz 3.8) genügt es, zu zeigen, dass

$$\int_{\langle z_1, z_2, z_3 \rangle} f(\zeta)\, d\zeta = 0$$

für alle $z_1, z_2, z_3 \in \Omega$ mit $\Delta(z_1, z_2, z_3) \subset \Omega$ gilt. Nach dem Satz von Goursat (Satz 2.17) wissen wir

$$\int_{\langle z_1, z_2, z_3 \rangle} f_n(\zeta)\, d\zeta = 0 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da $\langle z_1, z_2, z_3 \rangle^* = \partial\Delta(z_1, z_2, z_3)$ kompakt ist, folgt

$$\begin{aligned} \left| \int_{\langle z_1, z_2, z_3 \rangle} f(\zeta)\, d\zeta \right| &= \left| \int_{\langle z_1, z_2, z_3 \rangle} \big(f(\zeta) - f_n(\zeta)\big)\, d\zeta \right| \\ &\overset{2.13}{\leq} L(\langle z_1, z_2, z_3 \rangle) \|f - f_n\|_{\partial\Delta(z_1, z_2, z_3)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

und damit, wie gewünscht,

$$\int_{\langle z_1, z_2, z_3 \rangle} f(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

(ii) Sei $z_0 \in \Omega$ gegeben. Wir wählen $r_0 > 0$ mit $\overline{D(z, 2r_0)} \subset \Omega$. Nach Satz 2.26 gilt dann für $k \in \mathbb{N}_0$ und alle $z \in \overline{D(z_0, r_0)}$, dass

$$\begin{aligned} |f^k(z) - f_n^{(k)}(z)| &\leq k! \underbrace{\frac{2r_0}{(2r_0 - \underbrace{|z - z_0|}_{\leq r_0})^{k+1}}}_{\leq \frac{2r_0}{r_0^{k+1}} = \frac{2}{r_0^k}} \|f - f_n\|_{\partial D(z_0, 2r_0)} \\ &\leq \frac{2k!}{r_0^k} \|f - f_n\|_{\partial D(z_0, 2r_0)}. \end{aligned}$$

Also:

$$\|f^{(k)} - f_n^{(k)}\|_{\overline{D(z_0, r_0)}} \leq \frac{2k!}{r_0^k} \|f - f_n\|_{\partial D(z_0, 2r_0)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Mit Lemma 4.2 (ii) folgern wir nun, dass $(f_n^{(k)})_{n=1}^{\infty}$ auf Ω kompakt gegen $f^{(k)}$ konvergiert. ■

Der Begriff der kompakten Konvergenz für Folgen stetiger Funktionen überträgt sich natürlich direkt auf Reihen stetiger Funktionen (indem man die Folge der Partialsummen betrachtet). Daneben wollen wir nun einen etwas spezielleren Konvergenzbegriff für Reihen stetiger Funktionen einführen, der mit dem Begriff der absoluten Konvergenz für Reihen komplexer Zahlen vergleichbar ist.

Definition 4.4: Sei $(f_n)_{n=0}^\infty$ eine Folge aus $\mathscr{C}(\Omega)$. Wir sagen

„die Reihe $\sum_{n=0}^\infty f_n$ *konvergiert normal in* Ω“,

falls für jede kompakte Teilmenge $K \subset \Omega$ gilt:

$$\sum_{n=0}^\infty \|f_n\|_K < \infty.$$

Lemma 4.5: *Sei* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *offen und* $(f_n)_{n=0}^\infty$ *eine Folge aus* $\mathscr{C}(\Omega)$.

(i) *Die Reihe* $\sum_{n=0}^\infty f_n$ *konvergiert genau dann normal in* Ω, *wenn zu jedem* $z \in \Omega$ *ein* $r > 0$ *existiert mit* $\overline{D(z,r)} \subset \Omega$ *und*

$$\sum_{n=0}^\infty \|f_n\|_{\overline{D(z,r)}} < \infty.$$

(ii) *Konvergiert* $\sum_{n=0}^\infty f_n$ *normal in* Ω, *dann konvergiert* $(\sum_{n=0}^N f_n)_{N=0}^\infty$ *kompakt auf* Ω *gegen eine stetige Funktion* f. *Wir schreiben dann*

$$f = \sum_{n=0}^\infty f_n.$$

In diesem Fall gilt für jeden stückweise glatten Weg $\gamma : I \to \mathbb{C}$ *mit* $\gamma^* \subset \Omega$, *dass*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{n=0}^\infty \int_\gamma f_n(z)\, dz\,.$$

(iii) *Sind alle* f_n *auf* Ω *holomorph und konvergiert* $\sum_{n=0}^\infty f_n$ *normal in* Ω, *dann ist die nach (ii) stetige Funktion* $f = \sum_{n=0}^\infty f_n$ *ebenfalls holomorph und für jedes* $k \in \mathbb{N}$ *konvergiert* $\sum_{n=0}^\infty f_n^{(k)}$ *normal (!) in* Ω *mit*

$$f^{(k)} = \sum_{n=0}^\infty f_n^{(k)}.$$

Beweis: Als Übung. ■

Wir wenden uns nun Potenzreihen als wichtigem Spezialfall von Funktionenreihen zu.

Definition 4.6: Sind $z_0 \in \mathbb{C}$ und eine Folge $(a_n)_{n=0}^\infty$ aus $\mathbb{C}$ gegeben, dann nennen wir die Funktionenreihe

$$\sum_{n=0}^\infty a_n (z - z_0)^n$$

d. h. $f_n(z) = a_n(z - z_0)^n$, eine *(formale) Potenzreihe* mit *Entwicklungspunkt* z_0 und *Koeffizienten* $(a_n)_{n=0}^\infty$.

Satz 4.7 (Abelsches Konvergenzlemma, Abel 1826): *Gibt es $r_0, M > 0$ mit*

$$|a_n| r_0^n \leq M \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}_0,$$

dann ist die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ normal konvergent in $D(z_0, r_0)$. Insbesondere gilt: Konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ für ein $z = z_* \neq z_0$, dann konvergiert sie normal in $D(z_0, |z_* - z_0|)$.

Beweis: Für jedes $0 < r < r_0$ gilt

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \max_{z \in \overline{D(z_0,r)}} |a_n (z - z_0)^n| &= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{|a_n| r_0^n}_{\leq M} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \\ &\leq M \frac{1}{1 - \frac{r}{r_0}} < \infty. \end{aligned}$$

Damit ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ normal konvergent in $D(z_0, r_0)$. Der Zusatz ist klar, denn falls $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_* - z_0)^n$ konvergiert, ist $\big(a_n (z_* - z_0)^n\big)_{n=0}^{\infty}$ eine Nullfolge, also beschränkt, d. h. wir finden ein $M > 0$, sodass

$$|a_n| |z_* - z_0|^n = |a_n (z_* - z_0)^n| \leq M$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. ■

Satz 4.8: *Wir definieren den* Konvergenzradius $R \in [0, \infty]$ *von* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ *durch*

$$R := \sup \left\{ r \geq 0 : \big(|a_n| r^n\big)_{n=0}^{\infty} \text{ ist beschränkt} \right\}.$$

Dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$

(i) *in $D(z_0, R)$ normal konvergent und*

(ii) *in jedem Punkt $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D(z_0, R)}$ divergent.*

Man beachte, dass der obige Satz keine Aussage über die Konvergenz der betrachteten Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ auf dem Rand $\partial D(z_0, R)$ macht. Hier ist in der Tat keine allgemeine Aussage möglich.

Beweis (von Satz 4.8): Im Fall $R = 0$ ist nichts zu zeigen. Für $R \neq 0$ folgt (i) aus Satz 4.7 (denn für alle $0 < r < R$ ist die Folge $\big(|a_n| r^n\big)_{n=0}^{\infty}$ nach Definition von R beschränkt, d. h., wir können ein $M > 0$ finden, sodass $|a_n| r^n \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ erfüllt ist) und (ii) gilt, da die Folge $\big(|a_n| |z - z_0|^n\big)_{n=0}^{\infty}$ für $|z - z_0| > R$ unbeschränkt ist (während die Konvergenz der Reihe erzwingen würde, dass die Folge der Reihenglieder $\big(a_n (z - z_0)^n\big)_{n=0}^{\infty}$ eine Nullfolge und damit insbesondere beschränkt ist). ■

Satz 4.9 (Entwicklungssatz, Cauchy 1831): *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt für alle $z_0 \in \Omega$ und $r_0 > 0$ mit $D(z_0, r_0) \subset \Omega$*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \qquad \text{für alle } z \in D(z_0, r_0) \tag{4.1}$$

mit normaler Konvergenz in $D(z_0, r_0)$.

Beweis: Sei $r_0 > r > 0$. Für $z \in D(z_0, r)$ und alle $r_0 > |\zeta - z_0| > |z - z_0|$ gilt

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\zeta - z_0}\right)^{n+1} (z - z_0)^n$$

und somit

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n,$$

jeweils mit normaler Konvergenz in ζ. Mit Teil (ii) von Lemma 4.5 folgt nun, wie gewünscht, dass

$$\underbrace{\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_{z_0, r, \circlearrowleft}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta}_{= f(z),\ \text{nach Satz 2.22}} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_{z_0, r, \circlearrowleft}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta\right)}_{= \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},\ \text{nach Satz 2.25}} (z - z_0)^n.$$

Die Reihe in Gl. (4.1) konvergiert also in allen Punkten $z \in D(z_0, r)$ für alle $0 < r < r_0$, somit auf ganz $D(z_0, r)$, und dort (nach dem Zusatz in Satz 4.7) auch normal auch normal. ■

Korollar 4.10: *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Für eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *f ist holomorph auf Ω.*

(ii) *f ist* analytisch *auf Ω, d. h., lokal durch eine konvergente Potenzreihe darstellbar: Zu jedem $z_0 \in \Omega$ gibt es ein $r_0 > 0$ mit $D(z_0, r_0) \subseteq \Omega$ und eine Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ komplexer Zahlen, sodass*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{für alle } z \in D(z_0, r_0). \tag{4.2}$$

(iii) *f ist auf* jeder *Kreisscheibe $D(z_0, r_0) \subseteq \Omega$ durch eine Potenzreihe der Form Gl. (4.2) darstellbar.*

In diesem Fall gilt notwendigerweise für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_{z_0, r_0, \circlearrowleft}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta \tag{4.3}$$

mit beliebigem $0 < r < r_0$.

Beweis:

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Trivial.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Dies folgt aus Satz 4.7 bzw. Satz 4.8.

(i) $\Rightarrow$ (iii): Dies ist die Aussage von Satz 4.9.

Da die Reihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$
auf $D(z_0, r_0)$ normal gegen f konvergiert, liefert Lemma 4.5 (iii) die Formel
$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0).$$
Die zweite Gleichheit in Gl. (4.3) folgt aus Satz Satz 2.25. ■

Beispiel 4.11:

(i) In Aufgabe 3, Blatt 3 wurde bereits gezeigt, dass
$$\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$
auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist (mit Hilfe von $\exp(x + \mathrm{i}y) = e^x(\cos(y) + \mathrm{i}\sin(y))$ haben wir dort $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \exp(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ nachgerechnet).
Alternativ können wir nun den Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ bestimmen: Für diesen gilt
$$R = \sup\left\{r \geq 0 \mid \left(\tfrac{1}{n!} r^n\right)_{n=0}^{\infty} \text{ ist beschränkt}\right\}.$$
Da aber sogar
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} r^n = 0 \qquad \text{für alle } r \geq 0$$
gilt, folgt $R = \infty$, sodass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ auf $D(0, \infty) = \mathbb{C}$ normal konvergent ist (vgl. Satz 4.8) und dort nach Lemma 4.5 (ii) eine holomorphe Funktion darstellen muss. Zudem folgt damit
$$\exp'(z) = \exp(z) \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

(ii) Mit exp sind auch
$$\sin : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad z \longmapsto \frac{1}{2\mathrm{i}}(\exp(\mathrm{i}z) - \exp(-\mathrm{i}z))$$
und
$$\cos : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad z \longmapsto \frac{1}{2}(\exp(\mathrm{i}z) + \exp(-\mathrm{i}z))$$

ganze Funktionen, müssen also nach Satz 4.9 durch auf ganz $\mathbb{C}$ konvergente Potenzreihen darstellbar sein. In der Tat folgt aus (i), dass

$$\begin{aligned}
\sin(z) &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\mathrm{i}z)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-\mathrm{i}z)^n\Big)\\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\big(1-(-1)^n\big)\mathrm{i}^n z^n,\\
&\qquad\qquad \text{wobei}\quad 1-(-1)^n = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ gerade}\\ 2, & \text{falls } n \text{ ungerade}\end{cases}\\
&= \frac{1}{i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}\mathrm{i}^{2k+1}z^{2k+1}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1},
\end{aligned}$$

und analog, dass

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{2k},$$

wobei beide Potenzreihen besitzen den Konvergenzradius $R = \infty$ besitzen. Mit Lemma 4.5 (iii) folgt

$$\cos'(z) = -\sin(z) \quad , \quad \sin'(z) = \cos(z).$$

(iii) Wir betrachten die holomorphe Funktion

$$f : \mathbb{C}\setminus\{-\mathrm{i},\mathrm{i}\} \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad z \longmapsto \frac{1}{1+z^2}.$$

Mit der Formel für die geometrische Reihe können wir f um $z_0 = 0$ in eine Potenzreihe entwickeln:

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(\mathrm{i}z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(\mathrm{i}z)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$$

Gemäß Satz 4.9 muss diese Reihe auf $D(0,1)$ konvergieren. Für den Konvergenzradius R gilt somit $R \geq 1$. Wäre $R > 1$, würde die Reihe auf $D(0,R)$ eine holomorphe Funktion $\tilde{f}$ darstellen, die $f|_{D(0,1)}$ holomorph und damit insbesondere stetig fortsetzt. Damit würde

$$\lim_{\substack{z\to\pm\mathrm{i}\\ z\in D(0,1)}} f(z) = \tilde{f}(\pm\mathrm{i})$$

gelten, was aber nicht möglich ist, da

$$f(\mathrm{i}t) = \frac{1}{1-t^2} \longrightarrow \infty \qquad \text{für } t \to \pm 1,.$$

Es muss also $R = 1$ gelten. Dieses Ergebnis lässt sich hier natürlich durch Satz 4.8 bestätigen, solche Überlegungen können die Bestimmung von Konvergenzradien aber manchmal vereinfachen. Man beachte, dass für

$$f|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$$

nicht offensichtlich ist, warum die darstellende Potenzreihe um 0 „nur" den Konvergenzradius $R = 1$ besitzt. Dies wird erst im Komplexen klar!

Bemerkung 4.12: Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{O}(G)$. Ist $z_0 \in G$ gegeben, so wissen wir aus Satz 4.9, dass sich f auf $D(z_0, r_0)$ mit

$$r_0 = \max\{r > 0 \mid D(z_0, r) \subset G\} = \operatorname{dist}(z_0, \mathbb{C} \setminus G) := \min_{z \in \mathbb{C} \setminus G} |z - z_0|$$

durch eine konvergente Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{für } z \in D(z_0, r_0)$$

darstellen lässt. Für den Konvergenzradius R dieser Reihe gilt somit $R \geq r_0$. Gilt $R > r_0$, so liefert die Reihe eine *analytische Fortsetzung* von f. Falls $G \cap D(z_0, R)$ nicht zusammenhängend ist, muss diese Fortsetzung jedoch nicht mit f übereinstimmen. Andernfalls wird die Eindeutigkeit der Fortsetzung durch den Identitätssatz für Potenzreihen (vgl. Kapitel 5) garantiert.

Ein Beispiel hierfür ist der *Hauptzweig des Logarithmus* auf $\mathbb{C}_- := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$,

$$\operatorname{Log}(z) := \int_{\gamma_{1 \to z}} \frac{1}{w}\, dw \qquad \text{für } z \in \mathbb{C}_-,$$

dessen Reihenentwicklung um einen Punkt $z_0 \in \mathbb{C}_-$ mit $\operatorname{Re}(z_0) < 0$ den Konvergenzradius $|z_0|$ besitzt. (Übung)

5. Nullstellen holomorpher Funktionen und Identitätssatz

Definition 5.1: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine Teilmenge $M \subset \Omega$ heißt *diskret*, falls in Ω kein Häufungspunkt[1] von M enthalten ist.

Beispiel 5.2: Wir betrachten die Menge $M := \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Diese ist

- diskret in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$,
- jedoch nicht diskret in $\mathbb{C}$.

Die Eigenschaft „diskret in Ω" ist also keine Eigenschaft von M, sondern hängt von der Inklusion $M \subset \Omega$ ab.

Satz 5.3: *Sei $\varnothing \neq G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine von der Nullfunktion verschiedene holomorphe Funktion. Dann ist die* Nullstellenmenge

$$\mathcal{N}(f) := \{z \in G \mid f(z) = 0\}$$

diskret in G.

Beweis: ① Sei $z_0 \in G$ ein Häufungspunkt von $\mathcal{N}(f)$. Wir wählen $r_0 > 0$ mit

$$D(z_0, r_0) \subset G$$

und entwickeln f gemäß Satz 4.9 um z_0 in eine auf $D(z_0, r_0)$ konvergente Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{für} \quad z \in D(z_0, r_0),$$

wobei $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$. Da f stetig in z_0 ist und z_0 ein Häufungspunkt von $\mathcal{N}(f)$ ist, folgt $f(z_0) = 0$ und damit $a_0 = 0$. Wir zeigen nun $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Annahme: Es existiert $m \in \mathbb{N}_0$ mit $a_m \neq 0$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass m minimal mit dieser Eigenschaft ist, d. h., dass

$$a_n = 0 \quad \text{für} \quad n = 0, 1, \ldots, m - 1$$

[1] Ist $M \subseteq \mathbb{C}$ gegeben, dann nennen wir $z \in \mathbb{C}$ einen *Häufungspunkt von M*, falls die Bedingung

$$D(z, \varepsilon) \cap (M \setminus \{z\}) \neq \varnothing$$

für alle $\varepsilon > 0$ erfüllt ist.

gilt. Also ist für $z \in D(z_0, r_0)$

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = (z-z_0)^m \underbrace{\sum_{n=m}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n-m}}_{=:h(z)},$$

wobei $h : D(z_0, r_0) \to \mathbb{C}$ holomorph ist mit

$$h(z_0) = a_m \neq 0.$$

Da h insbesondere stetig in z_0 ist, gibt es somit ein $0 < r < r_0$, sodass h auf $D(z_0, r)$ keine Nullstelle besitzt. Aus der Zerlegung

$$f(z) = (z-z_0)^m h(z) \quad \text{für} \quad z \in D(z_0, r)$$

folgt nun, dass z_0 die einzige Nullstelle von f auf $D(z_0, r)$ ist, im Widerspruch dazu, dass z_0 ein Häufungspunkt von $\mathcal{N}(f)$ ist.

Es gilt also $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, d. h. $f(z) = 0$ für alle $z \in D(z_0, r_0)$. Somit sehen wir, dass $D(z_0, r_0) \subset \mathcal{N}(f)$ gelten muss.

② Wir betrachten die Menge

$$A := \{z \in G \mid z \text{ ist Häufungspunkt von } \mathcal{N}(f)\}.$$

Diese Menge A ist in $(G, d_{|\cdot|}|_{G\times G})$

- offen (nach ①) und
- abgeschlossen, denn

$$G \backslash A = \{z \in G \mid z \text{ ist kein Häufungspunkt von } \mathcal{N}(f)\}$$

  ist trivialerweise offen in $(G, d_{|\cdot|}|_{G\times G})$.

Weil G zusammenhängend ist, muss also

$$A = \varnothing \quad \text{oder} \quad A = G$$

gelten. Im Fall $A = G$ wäre $f \equiv 0$ auf G im Widerspruch zur Voraussetzung. Somit muss $A \neq \varnothing$ gelten, d. h. kein Häufungspunkt von $\mathcal{N}(f)$ liegt in G. ■

Satz 5.4 (Identitätssatz für holomorphe Funktionen): *Sei $\varnothing \neq G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann sind für $f, g \in \mathcal{O}(G)$ die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *$f = g$,*

(ii) *Die „Identitätsmenge“*

$$\{z \in G \mid f(z) = g(z)\}$$

hat einen Häufungspunkt in G,

(iii) *Es gibt einen Punkt $z_0 \in G$, sodass*

$$f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis:

(ii) $\Rightarrow$ (i): Man wende Satz 5.3 auf die Funktion $f - g \in \mathcal{O}(G)$ an.

(i) $\Rightarrow$ (iii): Klar.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Dies folgt aus Satz 4.9. ■

Korollar 5.5: *Sei $\varnothing \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in \Omega$, sodass $f(z_0) = 0$. Ist f nicht identisch Null um z_0, dann gibt es eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit*

- $f^{(n)}(z_0) = 0$ *für* $n = 0, 1, \ldots, m-1$,
- $f^{(n)}(z_0) \neq 0$.

Wir nennen $m =: \operatorname{ord}(f(z_0))$ die Ordnung *der Nullstelle z_0 von f. Ferner gibt es eine Funktion $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ mit $g(z_0) \neq 0$, sodass gilt*

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) \qquad \textit{für alle } z \in \Omega.$$

Beweis: Nach dem Identitätssatz Satz 5.4 wissen wir, dass

$$\{n \in \mathbb{N} \mid f^{(n)}(z_0) \neq 0\} \neq \varnothing,$$

denn andernfalls wäre $f \equiv 0$ auf der Zusammenhangskomponente von Ω, in der z_0 liegt. Wir können also

$$m = \min\{n \in \mathbb{N} \mid f^{(n)}(z_0) \neq 0\}$$

wählen. Wie im Beweis von Satz 5.3 finden wir zu $r_0 > 0$ mit $D(z_0, r_0) \subseteq \Omega$ eine Funktion $h \in \mathcal{O}(D(z_0, r_0))$ mit $h(z_0) \neq 0$, sodass

$$f(z) = h(z)(z - z_0)^m \qquad \text{für alle } z \in D(z_0, r_0).$$

Damit erhalten wir durch

$$g : \Omega \to \mathbb{C} \quad , \quad z \longmapsto \begin{cases} \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^m}, & z \neq z_0 \\ h(z_0), & z = z_0 \end{cases}$$

eine holomorphe Funktion (denn $g|_{D(z_0, r_0)} = h$) mit $g(z_0) = h(z_0) \neq 0$ und

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) \qquad \text{für alle } z \in \Omega.$$ ■

Korollar 5.6: *Sei $\varnothing \neq G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $0 \neq f \in \mathcal{O}(G)$, dann ist $\mathcal{N}(f)$ abzählbar.*

Beweis: Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß ist die Menge $\mathcal{N}(f) \cap K$ für jedes kompakte $K \subset G$ endlich (sonst gäbe es eine Folge $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ paarweise verschiedener Punkte in $\mathcal{N}(f) \cap K$, die eine konvergente Teilfolge besitzen müsste, deren Grenzwert dann ein Häufungspunkt von $\mathcal{N}(f)$ wäre, der jedoch zu K und damit zu G gehört).

Betrachte eine kompakte Ausschöpfung von G, d. h. eine Folge $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von kompakten Teilmengen von G mit

$$K_1 \subset \operatorname{int}(K_2) \subset K_2 \subset \cdots \subset K_n \subset \operatorname{int}(K_{n+1}) \subset K_{n+1} \subset \cdots \subset \bigcup_{m\in\mathbb{N}} K_m = G.$$

Wähle etwa

$$K_n := \left\{ z \in G \mid \operatorname{dist}(z, \mathbb{C}) \setminus G \geq \frac{1}{n} \right\} \cap D(0, n).$$

Dann ist

$$\mathcal{N}(f) = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} (\mathcal{N}(f) \cap K_m)$$

abzählbar, denn $\mathcal{N}(f) \cap K_m$ ist für jedes m endlich (und damit abzählbar). ■

Bemerkung 5.7:

(i) Die Voraussetzung in Satz 5.4, dass G ein Gebiet ist, ist entscheidend. Für nicht zusammenhängende offene Mengen gilt der Satz nicht. Sind etwa G_1, G_2 zwei Gebiete in $\mathbb{C}$ mit $G_1 \cap G_2 = \varnothing$, dann liefert

$$f \equiv 0 \text{ in } G_1 \quad , \quad f \equiv 1 \text{ in } G_2$$

eine Funktion $f \in \mathcal{O}(G_1 \cup G_2)$.

(ii) Satz 5.3 sagt nur, dass sich die Nullstellen nicht in G häufen dürfen. Häufungspunkte auf dem Rand sind hingegen möglich.

(iii) Satz 5.4 wird oft verwendet, um Identitäten von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$ zu übertragen. Beispielsweise gilt

$$\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z) \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C},$$

denn für $z \in \mathbb{R}$ ist dies bekannt und $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ist nicht diskret.

6. Singularitäten holomorpher Funktionen

Definition 6.1: Sei $\varnothing \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Gibt es zu $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ ein $r_0 > 0$, sodass

$$D^\bullet(z_0, r_0) \subseteq \Omega,$$

dann nennen wir z_0 eine *(isolierte) Singularität* von f.

Beispiel 6.2: Auf $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ betrachten wir die holomorphen Funktionen

$$f_1, f_2, f_3 : \Omega \to \mathbb{C},$$

die gegeben sind durch

$$f_1(z) = \frac{\sin(z)}{z} \quad , \quad f_2(z) = \frac{1}{z} \quad , \quad f_3(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right).$$

Dann ist $z_0 = 0$ eine isolierte Singularität von f_1, f_2, f_3, das Verhalten dieser Funktionen bei $z_0 = 0$ ist jedoch sehr verschieden.

(i) Mit Beispiel 4.11 (ii) sehen wir, dass

$$f_1(z) = \frac{\sin(z)}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k}, \quad z \neq 0,$$

wobei die Potenzreihe auf der rechten Seite sogar auf ganz $\mathbb{C}$ konvergiert, dort also eine holomorphe Funktion $\tilde{f}_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ darstellt, die f_1 holomorph nach $z_0 = 0$ fortsetzt; nämlich durch

$$\tilde{f}_1(0) = 1 = \lim_{z \to 0} \frac{\sin(z)}{z}.$$

Die Singularität von f_1 bei $z_0 = 0$ ist also „hebbar“.

(ii) Für jede Folge $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ aus $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $z_n \to 0$ für $n \to \infty$ gilt:

$$\lim_{n \to \infty} |f_2(z_n)| = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{|z_n|} = \infty.$$

Im Gegensatz zu f_1 lässt sich f_2 also nicht stetig nach 0 fortsetzen. Die Funktion f_2 hat einen „Pol“ bei $z_0 = 0$.

(iii) Das Verhalten von f_3 in der Nähe von 0 ist total irregulär. Beispielsweise gilt

$$f_3\left(\frac{1}{n}\right) = e^n \to \infty \qquad \text{für } n \to \infty$$

$$\left|f_3\left(\frac{1}{\mathrm{i}n}\right)\right| = |e^{\mathrm{i}n}| = 1 \qquad\qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Die Singularität von f_3 bei $z_0 = 0$ ist „wesentlich“.

Definition 6.3: Sei $\varnothing \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und z_0 eine isolierte Singularität von $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Wir nennen z_0 eine *hebbare Singularität* von f, falls es eine Funktion

$$\tilde{f} \in \mathcal{O}(\Omega \cup \{z_0\})$$

gibt mit

$$\tilde{f}|_\Omega = f.$$

Der Wert $\tilde{f}(z_0)$ und damit $\tilde{f}$ sind in diesem Fall (wegen der Stetigkeit von $\tilde{f}$) eindeutig durch f bestimmt.

Satz 6.4 (Riemannscher Hebbarkeitssatz, Riemann 1851): *Sei $\varnothing \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ und z_0 eine isolierte Singularität von f. Dann sind äquivalent:*

(i) *z_0 ist hebbar.*

(ii) *f ist beschränkt auf $D^\bullet(z_0, r)$ für ein $r > 0$ mit $D^\bullet(z_0, r) \subseteq \Omega$.*

Beweis:

(i) $\Rightarrow$ (ii): Klar, da die Fortsetzung $\tilde{f}$ stetig in z_0 und somit auf jeder Kreisscheibe $D(z_0, r)$ mit $\overline{D(z_0, r)} \subseteq \Omega \cup \{z_0\}$ beschränkt ist.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Wir definieren die Funktion

$$h : \Omega \cup \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad z \longmapsto \begin{cases} (z - z_0)^2 f(z) & \text{für } z \in \Omega \\ 0 & \text{für } z = z_0 \end{cases}.$$

Die Einschränkung $h|_\Omega$ ist klarerweise holomorph und im Punkt z_0 gilt

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0 \qquad \text{(da } f \text{ beschränkt ist)},$$

also $h \in \mathcal{O}(\Omega \cup \{z_0\})$ mit $h'(z_0) = 0$. Insbesondere ist $\operatorname{ord}(h, z_0) \geq 2$, d. h. es gibt (nach Korollar 5.5) eine Funktion $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\Omega \cup \{z_0\})$ mit

$$h(z) = (z - z_0)^2 \tilde{f}(z) \qquad \text{für alle } z \in \Omega \cup \{z_0\}.$$

Für $z \in \Omega$ haben wir also

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)^2} = \tilde{f}(z),$$

d. h. $\tilde{f}$ ist die gesuchte Fortsetzung. ∎

Satz 6.5: *Sei $\varnothing \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ und z_0 eine isolierte Singularität von f. Dann tritt genau einer der folgenden Fälle ein:*

(i) *f hat eine hebbare Singularität in z_0,*

(ii) f hat einen Pol in z_0, *d. h. es gibt eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$, sowie $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{C}$ mit $c_m \neq 0$, sodass*

$$z \longmapsto f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-z_0)^k}$$

eine hebbare Singularität in z_0 besitzt. Wir nennen dann m die Ordnung des Pols in z_0 *und*

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-z_0)^k}$$

den Hauptteil von f in z_0.

(iii) f hat eine wesentliche Singularität bei z_0, *d. h. für alle $r > 0$ mit $D^\bullet(z_0, r) \subseteq \Omega$ liegt*

$$f(D^\bullet(z_0, r))$$

dicht in $\mathbb{C}$.

Beweis: Wir nehmen an, dass die Bedingung in (iii) nicht zutrifft. Es genügt, zu zeigen, dass dann entweder (i) oder (ii) gilt. (Dies genügt, denn falls (iii) erfüllt ist, kann offenbar weder die Bedingung unter (i) noch die unter (ii) erfüllt sein.)

Nach Voraussetzung existieren $r > 0$, $\delta > 0$ und $w \in \mathbb{C}$, sodass gilt

$$D^\bullet(z_0, r) \subset \Omega \qquad \text{und} \qquad |f(z) - w| > \delta \quad \text{für alle } z \in D^\bullet(z_0, r).$$

Damit ist

$$g : D^\bullet(z_0, r) \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad z \longmapsto \frac{1}{f(z) - w}$$

wohldefiniert und holomorph. Ferner gilt

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z) - w|} < \frac{1}{\delta} \qquad \text{für alle } z \in D^\bullet(z_0, r).$$

Gemäß Satz 6.4 besitzt g eine hebbare Singularität in z_0; sei $\tilde{g} \in \mathcal{O}(D(z_0, r))$ die Fortsetzung von g.

Fall 1: $\tilde{g}(z_0) \neq 0$

Da $\tilde{g}|_{D^\bullet(z_0,r)} = g$ keine Nullstelle hat, liefert die Funktion

$$\tilde{f} : D(z_0, r) \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad z \longmapsto w + \frac{1}{\tilde{g}(z)}$$

eine holomorphe Fortsetzung von f nach z_0, d. h. f hat eine hebbare Singularität bei z_0. Es tritt hier also der Fall (i) ein.

Fall 2: $\tilde{g}(z_0) = 0$

Sei $m = \operatorname{ord}(\tilde{g}, z_0) \in \mathbb{N}$ die Ordnung der Nullstelle z_0. Nach Korollar 5.5 gibt es $\tilde{h} \in \mathcal{O}(D(z_0, r))$ mit

$$\tilde{h}(z_0) \neq 0 \qquad \text{und} \qquad \tilde{g}(z) = (z - z_0)^m \tilde{h}(z) \quad \text{für alle } z \in D(z_0, r).$$

Da $\tilde{g}|_{D^\bullet(z_0,r)} = g$ auf $D^\bullet(z_0, r)$ keine Nullstellen hat, besitzt $\tilde{h}$ auf $D(z_0, r)$ keine Nullstelle. Also ist

$$\frac{1}{\tilde{h}} : D(z_0, r) \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad z \longmapsto \frac{1}{\tilde{h}(z)}$$

holomorph. Wir betrachten die Potenzreihenentwicklung

$$\frac{1}{\tilde{h}(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{für alle } z \in D(z_0, r)$$

und setzen

$$c_k := a_{m-k} \qquad \text{für } k = 1, \ldots, m.$$

Damit gilt

$$c_m = a_0 = \frac{1}{\tilde{h}(z_0)} \neq 0$$

und für alle $z \in D^\bullet(z_0, r)$ haben wir

$$\frac{1}{f(z) - w} = g(z) = \tilde{g}(z) = (z - z_0)^m \tilde{h}(z),$$

sodass sich schließlich

$$\begin{aligned} f(z) - w = (z - z_0)^{-m} \frac{1}{\tilde{h}(z)} &= (z - z_0)^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \\ &= (z - z_0)^{-m} \left(\sum_{n=0}^{m-1} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} \frac{a_n}{(z - z_0)^{m-n}} + \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-m} \\ &= \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z - z_0)^k} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m} (z - z_0)^n \end{aligned}$$

ergibt. Insgesamt haben wir also

$$f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z - z_0)^k} = w + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m} (z - z_0)^n.$$

Da die holomorphe Funktion

$$\tilde{f} : D(z_0, r) \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad z \longmapsto w + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m} (z - z_0)^n$$

eine Fortsetzung von

$$z \longmapsto f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z - z_0)^k}$$

nach z_0 liefert, besitzt diese eine hebbare Singularität bei z_0. Hier tritt somit der Fall (ii) ein. ∎

Bemerkung 6.6:

(i) Besitzt f einen Pol der Ordnung m in z_0, so sind die Zahlen $c_1, \dots, c_m$ aus Satz 6.5 (ii) eindeutig bestimmt. Genauer gilt

$$c_k = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_{z_0,r,\circlearrowleft}} f(z)(z-z_0)^{k-1}\, dz$$

für $k = 1, \dots, m$, falls $D^\bullet(z_0, r_0) \subseteq \Omega$ und $0 < r < r_0$. Dies werden wir später noch vertiefen.

(ii) Satz 6.5 beinhaltet den *Satz von Casorati-Weierstraß* (1868 / 1876):

Satz: *Ist z_0 eine isolierte Singularität von $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, die weder hebbar noch ein Pol von f ist, dann liegt $f(U)$ dicht in $\mathbb{C}$ für jede offene Menge $U \subseteq \Omega$, für die $U \cup \{z_0\} \subseteq \Omega \cup \{z_0\}$ offen ist.*

Eine sehr viel schärfere Aussage liefert der „*große Satz von Picard*“ (E. Picard, 1879/1880), den wir hier jedoch nicht beweisen können:

Satz: *Eine holomorphe Funktion nimmt in jeder Umgebung einer wesentlichen Singularität alle bis auf höchstens einen komplexen Zahlenwert an.*

7. Die globale Fassung des Cauchyschen Integralsatzes

In Kapitel 2 haben wir den Cauchyschen Integralsatz für Sterngebiete (Satz 2.19) und darauf aufbauend die Cauchyschen Integralformeln für Kreisscheiben (Satz 2.22 und Satz 2.25). Ziel dieses Kapitels ist eine Verallgemeinerung dieser wichtigen Aussagen, die ohne die Einschränkung auf Sterngebiete bzw. Kreisscheiben auskommt.

Definition 7.1: Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener, stückweise glatter Weg. Für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ nennen wir

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta$$

den *Index* von γ bzgl. z.

Satz 7.2: *Ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener, stückweise glatter Weg, dann gilt*

$$\operatorname{Ind}_\gamma(c) \in \mathbb{Z} \qquad \textit{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$$

und die Funktion

$$\operatorname{Ind}_\gamma : \mathbb{C} \setminus \gamma^* \longrightarrow \mathbb{Z}$$

ist auf jeder Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ konstant. Auf der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ nimmt $\operatorname{Ind}_\gamma$ *den Wert 0 an.*

Beweis:

① *Behauptung:* Ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein glatter Weg, dann gilt für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$

$$\exp\left(\int_\gamma \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta \right) = \frac{\gamma(b) - z}{\gamma(a) - z}. \tag{7.1}$$

Beweis: Wir betrachten die Funktionen

$$G : [a,b] \to \mathbb{C} \quad , \quad t \mapsto \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}\, ds$$

und

$$F : [a,b] \to \mathbb{C} \quad , \quad t \mapsto (\gamma(t) - z) \exp(-G(t)).$$

Dann gilt $F, G \in \mathscr{C}^1([a,b])$ mit

$$G'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}$$

und daher

$$\begin{aligned} F'(t) &= \gamma'(t)\exp(-G(t)) - (\gamma(t)-z)G'(t)\exp(-G(t)) \\ &= \left(\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z} - G'(t)\right)(\gamma(t)-z)\exp(-G(t)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

für alle $t \in [a,b]$, d. h. die Funktion F ist auf $[a,b]$ konstant. Insbesondere gilt

$$\gamma(a) - z = F(a) = F(b) = (\gamma(b)-z)\exp\left(-\int_\gamma \frac{1}{\zeta - z}\,d\zeta\right)$$

und damit die Behauptung Gl. (7.1). ■

② *Behauptung:* Die Formel in Gl. (7.1) gilt auch für stückweise glatte Wege.

Beweis: Ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ stückweise glatt, dann wählen wir eine Zerlegung

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$$

des Intervalls $[a,b]$, sodass die Teilwege

$$\gamma_j := \gamma|_{[t_{j-1},t_j]} \qquad \text{für } j = 1,\dots,n$$

glatt sind. Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ gegeben. Nach ① gilt somit

$$\exp\left(\int_{\gamma_j} \frac{1}{\zeta - z}\,d\zeta\right) = \frac{\gamma(t_j)-z}{\gamma(t_{j-1})-z} \qquad \text{für } j = 1,\dots,n.$$

Es folgt, wie gewünscht,

$$\begin{aligned} \exp\left(\int_\gamma \frac{1}{\zeta-z}\,d\zeta\right) &= \exp\left(\sum_{i=1}^n \int_{\gamma_j} \frac{1}{\zeta-z}\,d\zeta\right) \\ &= \prod_{j=1}^n \exp\left(\int_{\gamma_j} \frac{1}{\zeta-z}\,d\zeta\right) \\ &= \prod_{j=1}^n \frac{\gamma(t_j)-z}{\gamma(t_{j-1})-z} \\ &= \frac{\gamma(t_n)-z}{\gamma(t_0)-z} \\ &= \frac{\gamma(b)-z}{\gamma(a)-z}. \end{aligned}$$

■

③ Ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ stückweise glatt und geschlossen, so liefert ②, dass

$$\exp\left(\int_\gamma \frac{1}{\zeta-z}\,d\zeta\right) = 1.$$

Wegen

$$\exp(x + \mathrm{i}y) = e^x\big(\cos(y) + \mathrm{i}\sin(y)\big) \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R},$$

können wir daraus folgern, dass

$$\int_\gamma \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta \in 2\pi \mathrm{i}\mathbb{Z} = \{2\pi i n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Damit gilt also $\mathrm{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

④ Mit der Zusatzaufgabe von Blatt 5 (oder durch eine Rechnung analog zu Aufgabe 4 auf Blatt 4) sieht man, dass

$$z \longmapsto \mathrm{Ind}_\gamma(z)$$

auf $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ holomorph und damit insbesondere stetig ist.

$\overset{③}{\Longrightarrow}$ Ind_γ ist lokal konstant.
(Als stetige Funktion mit diskretem Wertebereich.)

$\Longrightarrow$ Ind_γ ist konstant auf jeder Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.
(vgl. Aufgabe 1 (ii), Blatt 2)

⑤ Wähle $(z_n)_{n=1}^\infty$ in der unbeschränkten Zusammenhangskomponente G von $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, sodass $|z_n| \to \infty$ für $n \to \infty$. Wir setzen

$$d := \max_{\zeta \in \gamma^*} |\zeta|.$$

Damit gilt für hinreichend große n, dass

$$\begin{aligned} |\mathrm{Ind}_\gamma(z_n)| &= \left| \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z_n}\, d\zeta \right| \\ &\le \frac{1}{2\pi} L(\gamma) \underbrace{\max_{\zeta \in \gamma^*} \left| \frac{1}{\zeta - z_n} \right|}_{\le \frac{1}{|z_n| - d}} \qquad \text{(wegen Bemerkung 2.13)} \\ &\le \frac{L(\gamma)}{2\pi} \frac{1}{|z_n| - d}, \end{aligned}$$

und somit

$$|\mathrm{Ind}_\gamma(z_n)| \le \frac{L(\gamma)}{2\pi} \frac{1}{|z_n| - d} \longrightarrow 0 \qquad \text{für } n \to \infty,$$

d. h. $\mathrm{Ind}_\gamma(z_n) \to 0$ für $n \to \infty$. Weil Ind_γ nach ④ auf G konstant ist, muss somit $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$ für alle $z \in G$ gelten. ■

Beispiel 7.3:

(i) Für $z_0 \in \mathbb{C}$ und r_0 gilt

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_{z_0, r_0, \circlearrowleft}}(z) = \begin{cases} 1, & \text{falls } |z - z_0| < r_0 \\ 0, & \text{falls } |z - z_0| > r_0 \end{cases}.$$

Für $|z - z_0| < r_0$ haben wir nach dem Zentrierungslemma (Satz 2.20) und Aufgabe 2 (a) von Blatt 4

$$\int_{\gamma_{z_0,r_0,\circlearrowleft}} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{\gamma_{z_0,r_0,\circlearrowleft}} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = 2\pi\mathrm{i},$$

wobei $r > 0$ so gewählt ist, dass $\overline{D(z,r)} \subset D(z_0, r_0)$.
Im Fall $|z - z_0| > r$ ist nichts zu zeigen, da $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| > r_0\}$ die unbeschränkte Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \gamma^*_{z_0,r_0,\circlearrowleft}$ ist. (Alternativ folgt dies aus dem Cauchyschen Integralsatz, Satz 2.19, da $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta - z}$ auf $D(z_0, |z - z_0|)$ holomorph ist.)

(ii) Wir betrachten den stückweise glatten Weg γ, der gegeben ist als Summenweg $\gamma := \gamma_1 + \gamma_2$ der beiden in Abbildung 7.1 dargestellten glatten Wege γ_1 und γ_2. Dann gilt $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 1$ für jeden Punkt $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Im}(z) > 0$ und

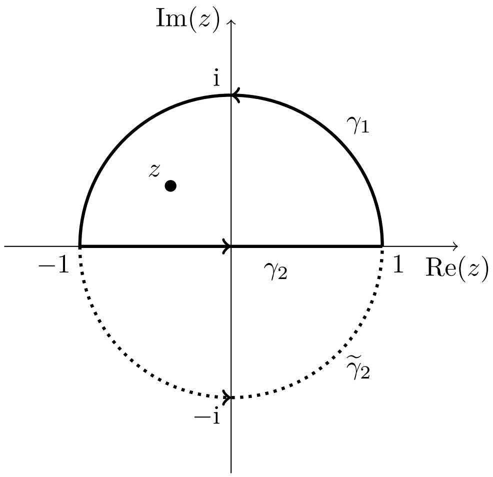


Abbildung 7.1.: Skizze zu Beispiel 7.3 (ii).

$|z| < 1$, denn nach Satz 2.19 haben wir

$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{\widetilde{\gamma}_2} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta$$

für den ebenfalls in Abbildung 7.1 dargestellten Weg $\widetilde{\gamma}_2$, sodass sich unter Verwendung von (i) schließlich

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_\gamma(z) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_1} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_2} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_1} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\widetilde{\gamma}_2} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta\end{aligned}$$

$$= \operatorname{Ind}_{\gamma_{0,1,\circlearrowleft}}(z)$$
$$= 1$$

ergibt. Hierbei haben wir noch ausgenutzt, dass $\gamma_{0,1,\circlearrowleft} = \gamma_1 + \widetilde{\gamma}_2$ gilt.

Bemerkung 7.4: (i) Man nennt $\operatorname{Ind}_\gamma(z)$ häufig auch die *Umlaufzahl* (oder die *Windungszahl*) von γ bzgl. z. Tatsächlich „zählt“ $\operatorname{Ind}_\gamma(z)$, wie oft γ den Punkt z umläuft.

(ii) In den „meisten Fällen“ lässt sich der Index mit der folgenden Faustregel bestimmen:

> Der Index $\operatorname{Ind}_\gamma : \mathbb{C} \setminus \gamma^* \to \mathbb{Z}$ vergrößert sich um 1, wenn γ von rechts nach links überquert wird.

Ein Beispiel hierzu wird in Abbildung 7.2 gegeben.

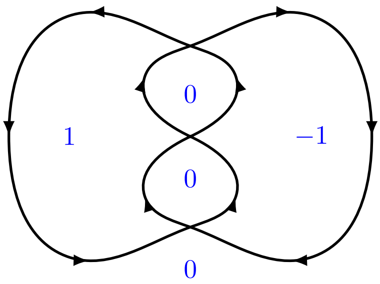


Abbildung 7.2.: Beispiel zur Bestimmung des Index $\operatorname{Ind}_\gamma$ für einen geschlossenen, stückweise glatten Weg γ mithilfe der Fautsregel aus Bemerkung 7.4.

Die in Bemerkung 7.4 aufgeführten Eigenschaften des Index sind nicht ganz offensichtlich, wir verzichten jedoch hier auf einen Beweis, da wir diese im Folgenden nicht benötigen werden. Stattdessen wenden wir uns der „Homotopieinvarianz“ des Index zu, mit deren Hilfe sich der Index ebenfalls in vielen Fällen leicht bestimmen lässt.

Definition 7.5: Sei (X, d) ein metrischer Raum und seien $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to X$ zwei geschlossene Wege. Wir nennen γ_0 und γ_1 *X-homotop*, falls es eine stetige Funktion

$$H : [0,1] \times [0,1] \to X$$

gibt, sodass gilt:

(i) $\forall\, s \in [0,1] : \quad H(s,0) = \gamma_0(s),$

(ii) $\forall\, s \in [0,1] : \quad H(s,1) = \gamma_1(s),$

(iii) $\forall\, t \in [0,1] : \quad H(0,t) = H(1,t).$

Mit anderen Worten: $\gamma_t(s) := H(s,t)$ definiert eine einparametrige Familie $(\gamma_t)_{t\in[0,1]}$ geschlossener Wege

$$\gamma_t : [0,1] \to X,$$

die γ_0 und γ_1 verbindet, d. h. „γ_0 kann stetig in γ_1 deformiert werden“. Wir nennen H eine *Homotopie.*

Lemma 7.6: *Seien $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C}$ geschlossene, stückweise glatte Wege. Gilt*

$$\forall\, s \in [0,1] : \quad |\gamma_1(s) - \gamma_0(s)| < |z - \gamma_0(s)| \tag{7.2}$$

für ein $z \in \mathbb{C}$ (und damit insbesondere $z \notin \gamma_0^*$ und $z \notin \gamma_1^*$), dann ist

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z) = \mathrm{Ind}_{\gamma_0}(z).$$

Beweis: Wegen $z \notin \gamma_0^*$ und $z \notin \gamma_1^*$ liefert

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad s \longmapsto \frac{\gamma_1(s) - z}{\gamma_0(s) - z}$$

einen geschlossenen, stückweise glatten Weg mit $0 \notin \gamma^*$. Für $s \in [0,1]$ gilt:

$$\gamma'(s) = \frac{\gamma_1'(s)(\gamma_0(s) - z) - (\gamma_1(s) - z)\gamma_0'(s)}{(\gamma_0(s) - z)^2}$$

und damit

$$\frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)} = \frac{\gamma_1'(s)}{\gamma_1(s) - z} - \frac{\gamma_0'(s)}{\gamma_0(s) - z}.$$

Es folgt, dass

$$\mathrm{Ind}_\gamma(0) = \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z) - \mathrm{Ind}_{\gamma_0}(z).$$

Ferner gilt für alle $s \in [0,1]$ wegen Gl. (7.2)

$$|\gamma(s) - 1| = \left| \frac{\gamma_1(s) - z}{\gamma_0(s) - z} - 1 \right| = \frac{|\gamma_1(s) - \gamma_0(s)|}{|\gamma_0(s) - z|} < 1,$$

also $\gamma^* \subset D_1(1)$. Weil somit 0 in der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ liegt, liefert Satz 7.2, dass $\mathrm{Ind}_\gamma(0) = 0$ gilt. Zusammenfassend folgt somit

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z) = \mathrm{Ind}_{\gamma_0}(z). \qquad \blacksquare$$

Satz 7.7: *Sei $\varnothing \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Sind $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \Omega$ zwei geschlossene, stückweise glatte Wege, die Ω-homotop sind, dann gilt für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$*

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z) = \mathrm{Ind}_{\gamma_0}(z).$$

Beweis: Sind γ_0, γ_1 homotop, so gibt es nach Definition 7.5 eine stetige Funktion

$$H : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$$

mit

$$H(s,0) = \gamma_0(s), \quad H(s,1) = \gamma_1(s) \quad \text{und} \quad H(0,t) = H(1,t).$$

Da H stetig ist, ist mit $[0,1] \times [0,1]$ auch $H([0,1] \times [0,1])$ kompakt. Es gibt deshalb ein $\varepsilon > 0$, sodass

$$\forall\, s,t \in [0,1] \times [0,1] : \quad |z - H(s,t)| > 2\varepsilon \tag{7.3}$$

Da H gleichmäßig stetig ist (als stetige Funktion auf einem Kompaktum), finden wir ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$|H(s_1,t_1) - H(s_2,t_2)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad |s_1 - s_2| + |t_1 - t_2| \leq \frac{1}{n}. \tag{7.4}$$

Wir betrachten nun die geschlossenen Polygonzüge

$$\alpha_0, \dots, \alpha_n : [0,1] \to \mathbb{C},$$

die gegeben sind durch

$$\alpha_k(s) := H\left(\frac{i}{n}, \frac{k}{n}\right)(ns + 1 - i) + H\left(\frac{i-1}{n}, \frac{k}{n}\right)(i - ns)$$
$$\text{falls } \frac{i-1}{n} \leq s \leq \frac{i}{n} \text{ für ein } 1 \leq i \leq n,$$

d. h. α_k durchläuft nacheinander die Punkte

$$H\left(\frac{i-1}{n}, \frac{k}{n}\right), \qquad i = 1, \dots, n.$$

Wir zeigen nun, dass mit diesen Wahlen gilt:

① $\forall\, k = 0, \dots, n \quad \forall\, s \in [0,1] : \quad |\alpha_k(s) - H(s, \frac{k}{n})| < \varepsilon$
② $\forall\, k = 1, \dots, n \quad \forall\, s \in [0,1] : \quad |\alpha_{k-1}(s) - \alpha_k(s)| < \varepsilon$
③ $\forall\, k = 0, \dots, n \quad \forall\, s \in [0,1] : \quad |z - \alpha_k(s)| > \varepsilon$

Man beachte, dass ① für $k = 0$ bzw. $k = n$ liefert, dass

④ $|\alpha_0(s) - \gamma_0(s)| < \varepsilon \quad$ und $\quad |\alpha_n(s) - \gamma_1(s)| < \varepsilon$.

Zu ①: Wir wählen $1 \leq i \leq n$, sodass $\frac{i-1}{n} \leq s \leq \frac{i}{n}$ gilt. Dann ist

$$\begin{aligned}
&\left|\alpha_k(s) - H\left(s, \frac{k}{n}\right)\right| \\
&\quad = \left| \left[H\left(\frac{i}{n}, \frac{k}{n}\right) - H\left(s, \frac{k}{n}\right)\right](ns + 1 - i) + \left[H\left(\frac{i-1}{n}, \frac{k}{n}\right) - H\left(s, \frac{k}{n}\right)\right](i - ns)\right| \\
&\quad \leq \underbrace{\left|H\left(\frac{i}{n}, \frac{k}{n}\right) - H\left(s, \frac{k}{n}\right)\right|}_{|\cdot| < \varepsilon, \quad \text{da } \left|s - \frac{i}{n}\right| \leq \frac{1}{n}} (ns + 1 - i) + \underbrace{\left|H\left(\frac{i-1}{n}, \frac{k}{n}\right) - H\left(s, \frac{k}{n}\right)\right|}_{|\cdot| < \varepsilon, \quad \text{da } \left|s - \frac{i-1}{n}\right| \leq \frac{1}{n}} (i - ns) \\
&\quad < \varepsilon,
\end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt für die beiden Abschätzungen $|\cdot| < \varepsilon$ jeweils Gl. (7.4) verwendet haben.

Zu ②: Sei wieder $1 \leq i \leq n$ mit $\frac{i-1}{n} \leq s \leq \frac{i}{n}$ gewählt. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
&|\alpha_{k-1}(s) - \alpha_k(s)| \\
&\quad = \Bigg| \left[H\left(\frac{i}{n}, \frac{k-1}{n}\right) - H\left(\frac{i}{n}, \frac{k}{n}\right) \right] (ns+1-i) \\
&\qquad + \left[H\left(\frac{i-1}{n}, \frac{k-1}{n}\right) - H\left(\frac{i-1}{n}, \frac{k}{n}\right) \right] (i-ns) \Bigg| \\
&\quad \leq \underbrace{\left| H\left(\frac{i}{n}, \frac{k-1}{n}\right) - H\left(\frac{i}{n}, \frac{k}{n}\right) \right|}_{<\varepsilon} (ns+1-i) \\
&\qquad + \underbrace{\left| H\left(\frac{i-1}{n}, \frac{k-1}{n}\right) - H\left(\frac{i-1}{n}, \frac{k}{n}\right) \right|}_{<\varepsilon} (i-ns) \\
&\quad < \varepsilon,
\end{aligned}
$$

wobei wir im vorletzten Schritt erneut Gl. (7.4) verwendet haben.

Zu ③: Wir rechnen nach, dass für alle $s \in [0,1]$ gilt

$$
|z - \alpha_k(s)| \geq \underbrace{\left| z - H\left(s, \frac{k}{n}\right) \right|}_{> 2\varepsilon, \text{ nach Gl. (7.3)}} - \underbrace{\left| \alpha_k(s) - H\left(s, \frac{k}{n}\right) \right|}_{< \varepsilon, \text{ nach ①}} > \varepsilon.
$$

Somit erhalten wir mit Lemma 7.6, dass

- $\mathrm{Ind}_{\gamma_0}(z) = \mathrm{Ind}_{\alpha_0}(z)$ und $\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z) = \mathrm{Ind}_{\alpha_n}(z)$ (wegen ④ und ③ für $k = 1$ bzw. $k = n$)
- $\mathrm{Ind}_{\alpha_{k-1}}(z) = \mathrm{Ind}_{\alpha_k}(z)$ für $k = 1, \ldots, n$ (wegen ② und ③ für $k = 1, \ldots, n$).

Zusammenfassend folgt also

$$
\mathrm{Ind}_{\gamma_0}(z) = \mathrm{Ind}_{\alpha_0}(z) = \mathrm{Ind}_{\alpha_1}(z) = \cdots = \mathrm{Ind}_{\alpha_n}(z) = \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z).
$$

■

Beispiel 7.8: Gegeben seien $a, b > 0$ und $r > 0$. Dann sind

$$
\begin{aligned}
\gamma_0 : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad s \longmapsto a\cos(2\pi s) + \mathrm{i} b \sin(2\pi s) \\
\gamma_1 : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad s \longmapsto r\cos(2\pi s) + \mathrm{i} r \sin(2\pi s) = r e^{\mathrm{i} 2\pi s}
\end{aligned}
$$

homotop in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ vermöge der Homotopie

$$
H(s,t) := \gamma_t(s) := (tr + (1-t)a)\cos(2\pi s) + \mathrm{i}(tr + (1-t)b)\sin(2\pi s).
$$

Gemäß Satz 7.7 gilt also $\mathrm{Ind}_{\gamma_0}(0) = \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(0) = 1$.

Definition 7.9:

(i) Sei $\varnothing \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Dann nennen wir einen geschlossenen Weg $\gamma_0 : [0,1] \to \Omega$ *nullhomotop in* Ω, falls γ_0 zu einem konstanten Weg $\gamma_1 : [0,1] \to \Omega$ (d. h. $\gamma_1(s) = z_0$ für alle $s \in [0,1]$ für ein $z_0 \in \Omega$) Ω-homotop ist.

(ii) Sei $\varnothing \neq G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Wir nennen G *einfach zusammenhängend*, falls jeder geschlossene Weg in G nullhomotop in G ist.

Definition 7.10:

(i) Eine *Kette stückweise glatter Wege* (kurz: *Kette*) Γ ist eine formale Summe

$$\Gamma = \sum_{j=1}^{k} n_j \gamma_j, \tag{7.5}$$

wobei $k \in \mathbb{N}$, $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $\gamma_1, \ldots \gamma_k$ stückweise glatte Wege sind. Sind alle Wege $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ geschlossen, dann nennen wir Γ einen *Zyklus*.

(ii) Für eine Kette der Form Gl. (7.5) nennen wir

$$\Gamma^* := \gamma_1^* \cup \cdots \cup \gamma_k^*$$

die *Spur von* Γ. Ist $f : \Gamma^* \to \mathbb{C}$ stetig, so definieren wir

$$\int_\Gamma f(z)\, dz := \sum_{j=1}^{k} n_j \int_{\gamma_j} f(z)\, dz\,.$$

(iii) Ist Γ ein Zyklus der Form Gl. (7.5), so definieren wir für $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ den *Index* von Γ bzgl. z durch

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) := \sum_{j=1}^{k} n_j \operatorname{Ind}_{\gamma_j}(z).$$

Die Aussagen von Satz 7.2 gelten dann wörtlich auch für

$$\operatorname{Ind}_\Gamma : \mathbb{C} \setminus \Gamma^* \to \mathbb{Z}.$$

Definition 7.11: Sei $\varnothing \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen.

(i) Sind Γ_1 und Γ_2 Zyklen in Ω (d. h. Γ_1 und Γ_2 sind Zyklen mit der Eigenschaft $\Gamma_1^*, \Gamma_2^* \subset \Omega$), dann nennen wir Γ_1 und Γ_2 *homolog in* Ω, falls

$$\operatorname{Ind}_{\Gamma_1}(z) = \operatorname{Ind}_{\Gamma_2}(z) \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \Omega.$$

(ii) Ist Γ ein Zyklus in Ω, dann heißt Γ *nullhomolog in* Ω, wenn gilt

$$\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 0 \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \Omega.$$

Offensichtlich gilt:

$$\Gamma_1 \text{ und } \Gamma_2 \text{ homolog in } \Omega \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Gamma_1 - \Gamma_2 \text{ nullhomolog in } \Omega$$

Satz 7.12 (Globale Version des Cauchyschen Integralsatzes): *Sei $\varnothing \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.*

(i) *Ist Γ ein nullhomologer Zyklus in Ω, dann gilt*

$$\operatorname{Ind}_\Gamma(z) f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta \tag{7.6}$$

für alle $z \in \Omega \setminus \Gamma^*$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$ und speziell

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 0. \tag{7.7}$$

(ii) *Sind Γ_1 und Γ_2 homologe Zyklen in Ω, dann gilt*

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\, dz = \int_{\Gamma_2} f(z)\, dz\,. \tag{7.8}$$

Typischerweise wenden wir Satz 7.12 in Situationen wie in Abbildung 7.3 an.

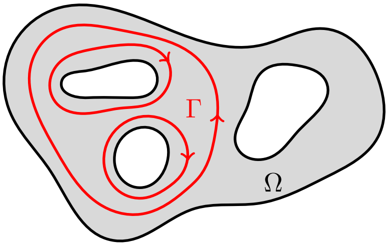


Abbildung 7.3.: Skizze zur Situation in Satz 7.12 (i), der globalen Version des Cauchyschen Integralsatzes.

Für den Beweis benötigen wir:

Lemma 7.13: *Ist $\varnothing \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, dann ist die Funktion*

$$g : \Omega \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad (z,w) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(w)}{z - w}, & \text{falls } z \neq w \\ f'(z), & \text{falls } z = w \end{cases}$$

stetig auf $\Omega \times \Omega$.

Beweis: Außerhalb der Diagonalen $\{(a,a) \mid a \in \Omega\} \subset \Omega \times \Omega$ ist die Stetigkeit klar. Seien nun $a \in \Omega$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Da f' stetig ist, finden wir ein $\delta > 0$ mit $D(a,\delta) \subseteq \Omega$ und

$$|f'(\zeta) - f'(a)| < \varepsilon \quad \forall \zeta \in D(a,\delta).$$

Für $(z,w) \in D(a,\delta) \times D(a,\delta)$ gilt daher

$$g(z,w) - g(a,a) = \int_0^1 \underbrace{\big(f'(\underbrace{w + t(z-w)}_{=:\zeta \in D(a,\delta)}) - f'(a) \big)}_{|\cdot|<\varepsilon} \, dt,$$

also $|g(z,w) - g(a,a)| < \varepsilon$. Damit ist g stetig im Punkt (a,a). ∎

Beweis (von Satz 7.12): Zu gegebenem $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ betrachten wir die stetige Funktion $g : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ aus Lemma 7.13, sowie

$$h : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad z \longmapsto \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma g(z,w)\, dw \, .$$

Da $g(\cdot, w) : \Omega \to \mathbb{C}$ für jedes $w \in \Gamma^*$ holomorph ist (die Singularität der Funktion $g(\cdot,w)|_{\Omega\setminus\{w\}}$ bei $z = w$ ist nämlich hebbar nach Satz 6.4), folgt mit der Zusatzaufgabe von Blatt 5 (angewendet auf jeden stückweise glatten, geschlossenen Weg γ_j in Γ), dass

$$h \in \mathcal{O}(\Omega).$$

Wir betrachten nun die offene (!) Menge

$$\widetilde{\Omega} := \{ z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^* \mid \mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0 \}.$$

Da Γ nullhomolog ist, gilt $\mathbb{C} \setminus \Omega \subseteq \widetilde{\Omega}$ und damit $\Omega \cup \widetilde{\Omega} = \mathbb{C}$. Weiter sei

$$\widetilde{h} : \widetilde{\Omega} \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad z \longmapsto \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw \, .$$

Wie oben für h sehen wir, dass $\widetilde{h} \in \mathcal{O}(\Omega)$. Für $z \in \Omega \setminus \Gamma^*$ gilt

$$\begin{aligned} h(z) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(z) - f(w)}{z - w}\, dw = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(w) - f(z)}{w - z}\, dw \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(w)}{z - w}\, dw - f(z) \mathrm{Ind}_\Gamma(z) \end{aligned} \tag{7.9}$$

und somit

$$h(z) = \widetilde{h}(z) \qquad \text{für alle } z \in \Omega \cap \widetilde{\Omega} (\subseteq \Omega \setminus \Gamma^*).$$

Wegen $\Omega \cup \widetilde{\Omega} = \mathbb{C}$ erhalten wir somit eine wohldefinierte ganze Funktion H durch

$$H|_\Omega := h \quad \text{und} \quad H|_{\widetilde{\Omega}} := \widetilde{h}.$$

Da Ind_Γ nach Satz 7.2 auf der unbeschränkten Zusammenhangskomponente G von $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ verschwindet, haben wir $G \subseteq \widetilde{\Omega}$. Damit gilt

$$\lim_{|z|\to\infty} H(z) = \lim_{|z|\to\infty} \widetilde{h}(z) = 0. \tag{7.10}$$

Die ganze Funktion H ist daher beschränkt, muss also nach dem Satz von Liouville (Satz 3.2) konstant sein. Wiederum aus Gl. (7.10) folgt schließlich $H \equiv 0$. Insbesondere gilt $h \equiv 0$, sodass mit Gl. (7.9) die Gültigkeit von Gl. (7.6) im Fall $k = 0$ folgt. Mit der Zusatzaufgabe von Blatt 5 folgt die Gültigkeit von Gl. (7.6) für beliebiges $k \in \mathbb{N}_0$.

Wir wählen nun $z \in \Omega \backslash \Gamma^*$. Indem wir Gl. (7.6) (im Fall $k = 0$) auf die holomorphe Funktion

$$\widetilde{f} : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad w \longmapsto (w - z) f(w)$$

anwenden, erhalten wir

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma f(w)\, dw = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{\widetilde{f}(w)}{w - z}\, dw = \mathrm{Ind}_\Gamma(z) \underbrace{\widetilde{f}(z)}_{=0} = 0.$$

Somit gilt Gl. (7.7), was den Beweis von (i) abschließt. Indem wir Gl. (7.7) auf $\Gamma := \Gamma_1 - \Gamma_2$ anwenden, folgt die Gültigkeit von Gl. (7.8), womit auch (ii) bewiesen ist. ■

Bemerkung 7.14: Jedes Sterngebiet G ist einfach zusammenhängend. Dies sieht man wie folgt: Ist $z_0 \in G$ ein Zentrum von G und $\gamma_1 : [0, 1] \to G$ ein beliebiger geschlossener Weg, dann liefert

$$H(s, t) := z_0 + (1 - t)(\gamma_0(s) - z_0)$$

eine Homotopie $H : [0, 1] \times [0, 1] \to G$ zwischen γ_0 und dem konstanten Weg $\gamma_1 : [0, 1] \to G$, $t \mapsto z_0$.

Allgemein gilt für eine offene Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ und einen geschlossenen, stückweise glatten Weg $\gamma_0 : [0, 1] \to \Omega$ nach Satz 7.7

$$„\gamma_0 \text{ nullhomotop in } \Omega\text{“} \qquad \Longrightarrow \qquad „\Gamma = \gamma_0 \text{ nullhomolog in } \Omega\text{“}.$$

In einem Sterngebiet ist damit jeder geschlossene, stückweise glatte Weg nullhomolog. Somit ist Satz 2.19 als Spezialfall in Satz 7.12 enthalten. Ebenso Satz 2.22 bzw. die Aussage von Aufgabe 4, Blatt 9.

8. Laurentreihen

In Satz 6.5 (siehe hierzu auch (i) in Bemerkung 6.6) und in Aufgabe 2 auf Blatt 8 haben wir bereits gesehen, dass sich eine holomorphe Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ auf jeder punktierten Kreisscheibe $D^\bullet(z_0, r_0) \subseteq \Omega$ um eine Polstelle z_0 von f der Ordnung $m \in \mathbb{N}$ in der Form

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in D^\bullet(z_0, r_0)$$

darstellen lässt. Diese Beobachtung wollen wir in diesem Kapitel verallgemeinern.

Definition 8.1: Eine Funktionenreihe der Form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{8.1}$$

mit $a_n \in \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{Z}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ (d. h. $f_n(z) = a_n(z - z_0)^n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$) heißt *(formale) Laurentreihe* mit *Koeffizienten* $(a_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ und *Entwicklungspunkt* z_0.

Die Laurentreihe in Gl. (8.1) heißt *(kompakt / normal) konvergent*, falls ihr *Hauptteil*

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

und ihr *Nebenteil*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

beide im Sinne von Funktionenreihen (kompakt / normal) konvergent sind. In diesen Fällen schreiben wir

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n := \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Satz 8.2: *Gegeben sei die formale Laurentreihe*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Wir setzen dann

- $r_1 := \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|} \in [0, \infty]$,

- $r_2 := \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1} \in [0, \infty]$

mit der üblichen Konvention $0^{-1} = \infty$, $\infty^{-1} = 0$. *Gilt* $r_1 < r_2$, *dann konvergiert die Laurentreihe normal auf dem* Ringgebiet

$$R(z_0; r_1, r_2) := \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z - z_0| < r_2\}$$

und ist divergent auf $\mathbb{C} \setminus \overline{R(z_0; r_1, r_2)}$.

Notation: Im Folgenden verwenden wir die Schreibweise

$$\Delta(z_0, r) := R(z_0; r, \infty) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| > r\}.$$

Damit ist

$$R(z_0; r_1, r_2) = D(z_0, r_2) \cap \Delta(z_0, r_1).$$

Beweis: Gemäß der Formel von Cauchy-Hadamard (Aufgabe 4, Blatt 6) gilt:

(i) r_2 ist der Konvergenzradius des Nebenteils

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

dieser ist also auf $D(z_0, r_2)$ normal konvergent und auf $\Delta(z_0, r_2)$ divergent.

(ii) $\frac{1}{r_1}$ ist der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n,$$

diese ist also auf $D(0, \frac{1}{r_1})$ normal konvergent und auf $\Delta(0, \frac{1}{r_1})$ divergent.

Da die Abbildung

$$\begin{aligned} \psi : \Delta(z_0, r_1) &\longrightarrow D\left(0, \frac{1}{r_1}\right) \\ z &\longmapsto w = \frac{1}{z - z_0} \end{aligned}$$

stetig ist, sehen wir, dass der Hauptteil

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (\psi(z))^n$$

auf $\Delta(z_0, r_1)$ normal konvergent und auf $D(z_0, r_1)$ divergent ist.

Zusammenfassend haben wir:

- Auf $R(z_0; r_1, r_2) = D(z_0, r_2) \cap \Delta(z_0, r_1)$ ist die Laurentreihe normal konvergent (da dort ihr Haupt- und Nebenteil beide normal konvergieren).
- Auf $\mathbb{C} \setminus \overline{R(z_0; r_1, r_2)} = \Delta(z_0, r_2) \cup D(z_0, r_1)$ ist die Laurentreihe divergent (da dort entweder ihr Haupt- oder ihr Nebenteil divergiert). ■

Wir zeigen nun, dass sich umgekehrt jede auf einem Ringgebiet holomorphe Funktion dort durch eine normal konvergente Laurentreihe darstellen lässt. Dies verallgemeinert Satz 4.9.

Satz 8.3 (Laurententwicklung, Laurent (1843), Weierstraß (1841/1894)): *Ist $f : R \to \mathbb{C}$ eine auf einem Ringgebiet*

$$R := R(z_0; r_1, r_2) \quad \textit{mit} \quad 0 \le r_1 < r_2 \le \infty$$

holomorphe Funktion, dann lässt sich f auf R durch eine auf R normal konvergente Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad , \quad z \in R \tag{8.2}$$

darstellen. Die Laurententwicklung Gl. (8.2) ist eindeutig und für alle $r_1 < r < r_2$ gilt

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_{z_0,r,\circlearrowleft}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta \qquad \textit{für alle } n \in \mathbb{Z}. \tag{8.3}$$

Beweis: *Eindeutigkeit:* Wird f auf R durch eine normal konvergente Laurentreihe wie in Gl. (8.2) dargestellt, dann gilt nach Lemma 4.5 (ii) für $\gamma := \gamma_{z_0,r,\circlearrowleft}$, dass

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (\zeta - z)^{n-k-1} \right) d\zeta \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma (\zeta - z)^{n-k-1}\, d\zeta \right)}_{=\delta_{n,k} \text{ (Aufgabe 2, Blatt 4)}} \\
&= a_k
\end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$. Die Koeffizienten $(a_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ müssen also von der Form Gl. (8.3) sein und sind somit eindeutig bestimmt.

Existenz: ① Wir zeigen zunächst, dass f auf R durch $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ mit a_n wie in Gl. (8.3) dargestellt wird.

Hierzu wählen wir (vgl. Abbildung 8.1)

$$S := R(z_0; s_1, s_2) \subset R$$

mit $r_1 < s_1 < s_2 < r_2$ und betrachten

$$\Gamma := \gamma_{z_0,s_2,\circlearrowleft} - \gamma_{z_0,s_1,\circlearrowleft}.$$

Offenbar stellt Γ einen nullhomologen Zyklus in R dar. Wegen $S \subseteq \mathbb{C} \backslash \Gamma^*$ besagt Satz 7.12 (i) (im Fall $k = 0$), dass

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(z) f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad \text{für alle } z \in S.$$

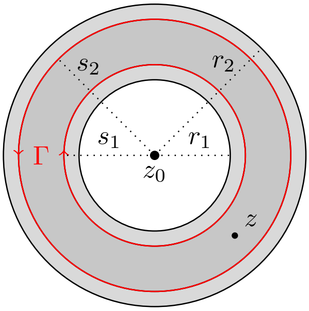


Abbildung 8.1.: Skizze zum Beweis von Satz 8.3.

Man beachte, dass für alle $z \in S$

$$\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = \operatorname{Ind}_{\gamma_{z_0,s_2,\circlearrowleft}}(z) - \operatorname{Ind}_{\gamma_{z_0,s_1,\circlearrowleft}}(z) = 1 - 0 = 1$$

gilt, und ferner

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \\ &= \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_{z_0,s_2,\circlearrowleft}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\right)}_{=:g(z)} + \underbrace{\left(-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_{z_0,s_1,\circlearrowleft}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\right)}_{=:H(z)},\end{aligned}$$

wobei die beiden Funktionen

$$g : D(z_0, s_2) \to \mathbb{C} \qquad \text{und} \qquad H : \Delta(z_0, s_1) \to \mathbb{C}$$

nach der Zusatzaufgabe von Blatt 5 holomorph sind. Damit gilt nun die *Laurentzerlegung*

$$f(z) = g(z) + H(z) \qquad \text{für alle } z \in S.$$

Wie im Beweis von Satz 4.9 sehen wir, dass

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\zeta - z)^{n+1}} (z - z_0)^n \qquad \text{für } \zeta \in \gamma^*_{z_0,s_2,\circlearrowleft} \text{ und } z \in D(z_0, s_2)$$

und ebenso

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\sum_{n=0}^{\infty} (\zeta - z_0)^n \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} \qquad \text{für } \zeta \in \gamma^*_{z_0,s_1,\circlearrowleft} \text{ und } z \in \Delta(z_0, s_1).$$

Damit ergibt sich jeweils (!)

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_{z_0,s_2,\circlearrowleft}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta\right)}_{=a_n} (z - z_0)^n$$

und

$$
\begin{aligned}
H(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_{z_0,s_1,\circlearrowleft}} f(\zeta)(\zeta - z_0)^n \, d\zeta \right) \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_{z_0,s_1\circlearrowleft}} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{n-1} \, d\zeta \right)}_{=a_{-n}} \frac{1}{(z-z_0)^{n}}.
\end{aligned}
$$

Also haben wir

$$
f(z) = g(z) + H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n.
$$

Man beachte, dass der Wert des Integrals in Gl. (8.3) nach Satz 7.12 tatsächlich von der Wahl von $r_1 < r < r_2$ unabhängig ist; dies rechtfertigt, warum wir die Koeffizienten in den beiden obigen Reihenentwicklungen als a_n identifizieren durften.

② Die normale Konvergenz der Laurentreihe ergibt sich wie folgt: Wir setzen für $r_1 < r < r_2$

$$
M(f;r) := \max_{t \in [0,2\pi]} |f(z_0 + re^{\mathrm{i}t})|.
$$

Dann gilt nach Bemerkung 2.13, dass

- $|a_n| \le \frac{1}{s_2^n} M(f;s_2)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$,
- $|a_{-n}| \le s_1^n M(f;s_1)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Hiermit folgert man leicht die normale Konvergenz auf S. Weil $r_1 < s_1 < s_2 < r_2$ beliebig vorgegeben waren, ist die Laurentreihe damit sogar auf R normal konvergent. ■

Korollar 8.4 (Laurentzerlegung): *Ist $f : R \to \mathbb{C}$ auf dem Ringgebiet*

$$
R := R(z_0; r_1, r_2) \qquad \textit{mit} \qquad 0 \le r_1 < r_2 \le \infty
$$

holomorph, dann existiert genau ein Paar (g, H) holomorpher Funktionen

$$
g : D(z_0, r_2) \to \mathbb{C}
$$

und

$$
H : \Delta(z_0, r_1) \to \mathbb{C} \qquad \textit{mit} \qquad \lim_{z \to \infty} H(z) = 0,
$$

sodass gilt

$$
f(z) = g(z) + H(z) \qquad \textit{für alle } z \in R. \tag{8.4}
$$

Beweis: Im Beweis von Satz 8.3 wurde die Existenz einer solchen Zerlegung auf $S = R(z_0; s_1, s_2)$ für beliebige $r_1 < s_1 < s_2 < r_2$ bewiesen. Genauer gilt

$$
\begin{aligned}
g(z) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_{z_0,s_2,\circlearrowleft}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta, && z \in D(z_0, s_2) \\
H(z) &= \frac{-1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_{z_0,s_1,\circlearrowleft}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta, && z \in \Delta(z_0, s_1).
\end{aligned}
$$

Nach Satz 7.12 (ii) sind die Werte beider Integrale für festes $z \in R$ unabhängig von der Wahl von s_1, s_2 mit $z \in S = R(z_0; s_1, s_2)$. Hierdurch werden also holomorphe Funktionen

$$g : D(z_0, r_2) \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \text{und} \qquad H : \Delta(z_0, r_1) \longrightarrow \mathbb{C}$$

definiert, die $\lim_{z\to\infty} H(z) = 0$ und Gl. (8.4) erfüllen.

Sind (g_1, H_1) und (g_2, H_2) zwei solche Zerlegungen, dann gilt

$$g_1(z) + H_1(z) = f(z) = g_2(z) + H_2(z) \qquad \forall\, z \in R$$

und somit

$$\underbrace{g_1(z) - g_2(z)}_{=:g(z)} = \underbrace{H_2(z) - H_1(z)}_{=:H(z)} \qquad \forall\, z \in R$$

wobei $g \in \mathcal{O}(D(z_0, r_2))$ und $H \in \mathcal{O}(\Delta(z_0, r_1))$. Damit gibt es eine Funktion $F \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ mit

$$F|_{D(z_0,r_2)} = g \qquad \text{und} \qquad F|_{\Delta(z_0,r_1)} = H.$$

Wegen $\lim_{z\to\infty} F(z) = \lim_{z\to\infty} H(z) = 0$, ist F beschränkt, nach dem Satz von Liouville (Satz 3.2) also konstant und somit $F \equiv 0$. Damit folgt $g \equiv 0$ und $H \equiv 0$, also ist $g_1 = g_2$ und $H_1 = H_2$. ∎

Beispiel 8.5: Wir betrachten die holomorphe Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{-\mathrm{i}, \mathrm{i}\} \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad z \longmapsto \frac{1}{1+z^2}.$$

Mithilfe der Partialbruchzerlegung

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{z-\mathrm{i}} - \frac{1}{z+\mathrm{i}}\right)$$

können wir die Laurententwicklung von f auf $R(\mathrm{i}; 0, 2)$, $R(\mathrm{i}, 2, \infty)$ sowie $R(0; 1, \infty)$ bestimmen:

(i) *auf* $R(\mathrm{i}; 0, 2)$*:* Die Laurentzerlegung (g, H) von f auf $R(\mathrm{i}; 0, 2)$ ist gegeben durch

$$g(z) = -\frac{1}{2\mathrm{i}}\frac{1}{z+\mathrm{i}} \qquad \text{und} \qquad H(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\frac{1}{z-\mathrm{i}}.$$

Der Hauptteil H hat bereits die gewünschte Form. Zur Bestimmung der Reihendarstellung des Nebenteils g betrachten wir

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z+\mathrm{i}} &= \frac{1}{(z-\mathrm{i}) + 2\mathrm{i}} \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}}\frac{1}{1+\frac{z-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}} \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}\right)^n, \qquad\qquad \text{da } \left|-\frac{z-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}\right| < 1,
\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2\mathrm{i})^{n+1}} (z - \mathrm{i})^n.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} f(z) &= g(z) + H(z) \\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}} \frac{1}{z - \mathrm{i}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2\mathrm{i})^{n+2}} (z - \mathrm{i})^n \\ &= \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2\mathrm{i})^{n+2}} (z - \mathrm{i})^n. \end{aligned}$$

(ii) *auf* $R(\mathrm{i}; 2, \infty)$*:* Hier ist die Laurentzerlegung (g, H) gegeben durch

$$g(z) = 0 \qquad \text{und} \qquad H(z) = f(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}} \left(\frac{1}{z - \mathrm{i}} - \frac{1}{z + \mathrm{i}} \right)$$

Da der Term $\frac{1}{z-\mathrm{i}}$ bereits die gewünschte Form besitzt, müssen wir nur den zweiten Term in H auftretenden Term $\frac{1}{z+\mathrm{i}}$ in eine Laurentreihe entwickeln. Hierzu rechnen wir nach, dass

$$\begin{aligned} \frac{1}{z + \mathrm{i}} &= \frac{1}{(z - \mathrm{i}) + 2\mathrm{i}} \\ &= \frac{1}{z - \mathrm{i}} \frac{1}{1 + \frac{2\mathrm{i}}{z - \mathrm{i}}} \\ &= \frac{1}{z - \mathrm{i}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2\mathrm{i}}{z - \mathrm{i}} \right)^n, && \text{da } \left| \frac{-2\mathrm{i}}{z - \mathrm{i}} \right| < 1, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-2\mathrm{i})^n \frac{1}{(z - \mathrm{i})^{n+1}}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir hier

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\mathrm{i}} \left(\frac{1}{z - \mathrm{i}} - \frac{1}{z + \mathrm{i}} \right) \\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}} \left(\frac{1}{2 - \mathrm{i}} - \sum_{n=0}^{\infty} (-2\mathrm{i})^n \frac{1}{(z - \mathrm{i})^{n+1}} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-2\mathrm{i})^{n-1} \frac{1}{(z - \mathrm{i})^{n+1}} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} (-2\mathrm{i})^{n-2} \frac{1}{(z - \mathrm{i})^n}. \end{aligned}$$

(iii) *auf* $R(0;1,\infty)$*:* Auch in diesem Fall ist die Laurentzerlegung (g,H) gegeben durch

$$g(z)=0 \qquad \text{und} \qquad H(z)=f(z)=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{z-\mathrm{i}}-\frac{1}{z+\mathrm{i}}\right).$$

Hier müssen wir jedoch beide in H auftretenden Terme $\frac{1}{z-\mathrm{i}}$ und $\frac{1}{z+\mathrm{i}}$ in Reihe entwickeln:

$$\frac{1}{z-\mathrm{i}}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{\mathrm{i}}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{i}}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{i}^n\frac{1}{z^{n+1}},$$
$$\frac{1}{z+\mathrm{i}}=\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{\mathrm{i}}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{\mathrm{i}}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-\mathrm{i})^n\frac{1}{z^{n+1}}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} f(z)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n-(-\mathrm{i})^n}{2\mathrm{i}}\frac{1}{z^{n+1}}\\ &=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2\mathrm{i}^{2k+1}}{2\mathrm{i}}\frac{1}{z^{2(k+1)}} && (n=2k+1)\\ &=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{z^{2(k+1)}}. \end{aligned}$$

In dieser Situation können wir die Laurententwicklung auch etwas einfacher bestimmen:

$$f(z)=\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{z^2}\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2(n+1)}}.$$

Die Eindeutigkeit der Laurententwicklung garantiert uns, dass das Ergebnis nicht vom gewählten Rechenweg abhängt.

Über die Laurententwicklung lassen sich isolierte Singularitäten sehr einfach charakterisieren:

Satz 8.6: *Sei z_0 eine isolierte Singularität von $f\in\mathcal{O}(\Omega)$. Wähle $r>0$ mit*

$$R:=R(z_0;0,r)=D^\bullet(z_0,r)\subseteq\Omega$$

und betrachte die Laurententwicklung von f auf R,

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n.$$

Dann gelten die folgenden Aussagen:

(i) z_0 *ist eine hebbare Singularität genau dann, wenn*

$$\forall\, n < 0: \quad a_n = 0.$$

(ii) z_0 *ist ein Pol der Ordnung* m *genau dann, wenn*

$$\forall\, n < -m: \quad a_n = 0 \qquad \textit{und} \qquad a_{-m} \neq 0.$$

(iii) z_0 *ist eine wesentliche Singularität genau dann, wenn*

$$a_n \neq 0 \quad \textit{für unendlich viele } n < 0.$$

Beweis:

(i) $\Rightarrow$: Ist z_0 eine hebbare Singularität, dann existiert eine Funktion $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\Omega \cup \{z_0\})$, sodass $\tilde{f}|_\Omega = f$. Wir betrachten die Potenzreihenentwicklung

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n (z - z_0)^n \qquad \text{für } z \in D(z_0, r)$$

und erhalten somit

$$f(z) = \tilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n (z - z_0)^n \qquad \text{für } z \in R.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Laurententwicklung folgt daraus

$$\begin{aligned} a_n &= \tilde{a}_n && \text{für } n \geq 0, \\ a_n &= 0 && \text{für } n < 0. \end{aligned}$$

$\Leftarrow$: Klar!

(ii) $\Rightarrow$: Ist z_0 ein Pol der Ordnung m, so existieren $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{C}$, wobei $c_m \neq 0$, und eine Funktion $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\Omega \cup \{z_0\})$, sodass

$$f(z) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(z - z_0)^k} = \tilde{f}(z) \qquad \text{für } z \in R.$$

Wir betrachten nun die Potenzreihenentwicklung

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n (z - z_0)^n \qquad \text{für } z \in D(z_0, r)$$

und schreiben damit

$$f(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z - z_0)^k} + \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n (z - z_0)^n.$$

Mit der Eindeutigkeit der Laurententwicklung erhalten wir nun

$$\begin{aligned} a_n &= \tilde{a}_n && \text{für } n \geq 0, \\ a_n &= c_{-n} && \text{für } -m \leq n < 0, \\ a_n &= 0 && \text{für } n < -m. \end{aligned}$$

$\Leftarrow$: Klar!

(iii) Klar, da z_0 genau dann wesentlich ist, wenn weder die Bedingung unter (i) noch die unter (ii) erfüllt ist. $\blacksquare$

9. Der Residuensatz

Der Residuensatz ist einer der wichtigsten Sätze der Funktionentheorie. Er verallgemeinert unter anderem die globale Fassung des Cauchyschen Integralsatzes (Satz 7.12) und stellt ein mächtiges Werkzeug unter anderem zur Berechnung reeller Integrale dar.

Die entscheidende Einsicht ist, dass man zur Berechnung von Integralen der Form

$$\int_\Gamma f(z)\,dz$$

für eine Funktion $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ auf einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ sowie einen Zyklus Γ in Ω nur das Verhalten von f an den von Γ „umlaufenen" isolierten Singularitäten verstehen muss.

Definition 9.1: Sei $\varnothing \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Für eine isolierte Singularität z_0 von f nennen wir

$$\operatorname{Res}(f; z_0) := a_{-1} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_{z_0,r,\circlearrowleft}} f(\zeta)\,d\zeta \tag{9.1}$$

das *Residuum von f in z_0*. Hierbei sei $r_0 > 0$ so gewählt, dass $D^\bullet(z_0, r_0) \subseteq \Omega$ gilt, und es bezeichne

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

die Laurententwicklung von f auf $D^\bullet(z_0, r_0) = R(z_0; 0, r_0)$. Für $0 < r < r_0$ gilt die Formel für a_{-1} dann nach Gl. (8.3).

Satz 9.2 (Residuensatz): *Sei $\varnothing \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus A)$, wobei $A \subset \Omega$ diskret ist. Dann gilt für jeden in Ω nullhomologen Zyklus Γ mit $\Gamma^* \cap A = \varnothing$, dass*

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{z \in A} \operatorname{Ind}_\Gamma(z) \cdot \operatorname{Res}(f; z). \tag{9.2}$$

Beweis:

① Zunächst halten wir fest, dass die Summe auf der rechten Seite von Gl. (9.2) effektiv endlich ist, da es nur endlich viele $z \in A$ mit $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) \neq 0$ geben kann.

Beweis: Wie im Beweis von Satz 7.12 betrachten wir die offene Menge

$$\tilde{\Omega} := \{z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^* \mid \operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 0\},$$

die $\mathbb{C} \setminus \Omega \subseteq \tilde{\Omega}$ und $G \subseteq \tilde{\Omega}$ erfüllt, wobei G die unbeschränkte Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ bezeichnet.

Somit ist $K := \mathbb{C} \setminus \tilde{\Omega}$ und es gilt $K \subset \Omega$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß ist $A \cap K$ endlich (vgl. Beweis von Korollar 5.6).

Alternativ: Zu $z \in \Omega$ wählen wir einen Radius $r(z) > 0$, sodass gilt:

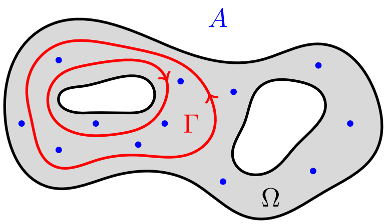


Abbildung 9.1.: Skizze zur Situation im Residuensatz, Satz 9.2.

- $D(z, r(z)) \subseteq \Omega$
- f ist auf $D(z, r(z)) \setminus \{z\}$ definiert und holomorph.

Sei $D(z_1, r(z_1)), \dots, D(z_n, r(z_n))$ eine endliche Teilüberdeckung der offenen Überdeckung $\big(D(z, r(z))\big)_{z \in K}$ von K. Dann ist f auf

$$\left(\bigcup_{j=1}^{n} D\big(z_j, r(z_j)\big) \right) \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$$

definiert und holomorph, d. h. $A \cap \{z_1, \dots, z_n\}$ sind die einzigen isolierten Singularitäten von f mit $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) \neq 0$. ■

② Sei nun $A \cap K = \{z_1, \dots, z_m\}$. Wir setzen $A_0 := A \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$. Dann gilt $A_0 \subset \tilde{\Omega}$, d. h. $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0$ für alle $z \in A_0$, sodass Γ auch in $\Omega \setminus A_0$ nullhomolog ist.

Zu $z_1, \dots, z_m$ wählen wir Radien $r_1, \dots, r_m > 0$, sodass

$$\overline{D(z_1, r_1)}, \dots, \overline{D(z_m, r_m)}$$

ganz in Ω enthalten und paarweise disjunkt sind. Damit ist der Zyklus

$$\tilde{\Gamma} := \Gamma - \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Ind}_\Gamma(z_j) \gamma_{z_j, r_j, \circlearrowleft}$$

nullhomolog in $\Omega \setminus A$. Mit Teil (i) von Satz 7.12 gilt nun

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\tilde{\Gamma}} f(z)\, dz \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma} f(z) - \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Ind}_\Gamma(z_j) \underbrace{\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_{z_j, r_j, \circlearrowleft}} f(z)\, dz}_{=\mathrm{Res}(f; z_j)} . \end{aligned}$$

Damit erhalten wir schließlich

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma} f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Ind}_\Gamma(z_j) \mathrm{Res}(f; z_j)$$

$$= \sum_{z \in A} \mathrm{Ind}_\Gamma(z) \mathrm{Res}(f; z_j),$$

wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, dass $A = \{z_1, \dots, z_m\} \cup A_0$ und $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0$ für alle $z \in A_0$ gilt. ■

Bemerkung 9.3: Alternativ kann man den Residuensatz Satz 9.2 beweisen, indem man die auf $\Omega \setminus A_0$ holomorphe Funktion

$$\tilde{f} := f(z) - \sum_{j=1}^{m} H_j(z)$$

betrachtet (vgl. Aufgabe 1, Blatt 9), wobei (g_j, H_j) die Laurentzerlegung von f auf dem Kreisring $R(z_j; 0, r_j)$ bezeichnet. Hierbei ist dann $H_j \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{z_j\})$. Wieder mit Satz 7.12 (i) folgert man die Behauptung in Gl. (9.2) nun aus

$$\int_\Gamma \tilde{f}(z)\, dz = 0.$$

Der Residuensatz ist deshalb so mächtig, weil man die Residuen in vielen Fällen direkt, d. h. ohne Integration berechnen kann.

Satz 9.4 (Rechenregeln für Residuen): *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $z_0 \in \Omega$.*

(i) *Hat $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_0\})$ einen Pol erster Ordnung, dann ist*

$$\mathrm{Res}(f; z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

Hat $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_0\})$ einen Pol m-ter Ordnung, dann gilt allgemeiner

$$\mathrm{Res}(f; z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \left(\frac{d}{dz}\right)^{m-1} \big((z - z_0)^m f(z)\big).$$

(ii) *Sind $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$ gegeben, sodass*

- *$f(z_0) \neq 0$,*
- *$g(z_0) = 0$ und $g'(z_0) \neq 0$,*

dann ist

$$\mathrm{Res}\left(\frac{f}{g}; z_0\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

(iii) *Hat $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_0\})$ einen Pol erster Ordnung und ist $g \in \mathcal{O}(\Omega)$, dann gilt*

$$\mathrm{Res}(f \cdot g; z_0) = g(z_0) \mathrm{Res}(f; z_0).$$

(iv) *Ist z_0 eine hebbare Singularität von $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_0\})$, dann gilt*

$$\mathrm{Res}(f; z_0) = 0.$$

Beweis: Als Übung. ∎

Bemerkung 9.5: Der Residuensatz (Satz 9.2) beinhaltet die globale Fassung des Cauchyschen Integralsatzes (Satz 7.12) als Spezialfall. Ist $\varnothing \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ und Γ ein nullhomologer Zyklus in Ω, dann wenden wir den Residuensatz für festes $k \in \mathbb{N}_0$ und für $z \in \Omega \setminus \Gamma^*$ auf die Funktion

$$\tilde{f} : \Omega \setminus \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad z \longmapsto \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}$$

an (mit $A = \{z_0\}$, wobei $\Gamma^* \cap A = \varnothing$). Damit folgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\, dz &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma \tilde{f}(z)\, dz \\ &= \mathrm{Ind}_\Gamma(z_0)\mathrm{Res}(\tilde{f}, z_0). \end{aligned}$$

Mithilfe von Satz 9.4 (i) erhalten wir, falls $f(z_0) \neq 0$ gilt und damit $\tilde{f}$ in z_0 einen Pol der Ordnung $k + 1$ hat, dass

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}(\tilde{f}, z_0) &= \frac{1}{k!} \lim_{z \to z_0} \left(\frac{d}{dz}\right)^k \big(\underbrace{(z - z_0)^{k+1} \tilde{f}(z_0)}_{= f(z)}\big) \\ &= \frac{1}{k!} \lim_{z \to z_0} f^{(k)}(z) \\ &= \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0). \end{aligned}$$

Gilt hingegen $f(z_0) = 0$, dann finden wir gemäß Korollar 5.5 ein $m \in \mathbb{N}$ sowie $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ mit $g(z_0) \neq 0$, sodass $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ für alle $z \in \Omega$ gilt. Man diskutiert anschließend die beiden Fälle $m \geq k + 1$ (d. h. $\tilde{f}$ hat in z_0 eine hebbare Singularität) und $m < k+1$ (d. h. $\tilde{f}$ hat in z_0 einen Pol der Ordnung $k+1-m$); wir überlassen die Details dem Leser, bemerken jedoch, dass $(z-z_0)^{k+1-m} \tilde{f}(z) = g(z)$ im Fall $m < k + 1$ gilt.

Somit erhalten wir wie behauptet

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(z_0) f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\, dz\,.$$

Der Residuensatz hat viele wichtige Anwendungen. Er erlaubt unter anderem die systematische Berechnung vieler reeller Integrale.

Beispiel 9.6: Sei $a \in (0, 1)$ gegeben. Wir wollen den Wert des Integrals

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(t)}{1 + a\cos(t)}\, dt$$

berechnen. Wir verwenden dazu den folgenden

Trick: Schreibe

$$\sin(t) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(e^{\mathrm{i}t} - e^{-\mathrm{i}t}) \qquad \text{und} \qquad \cos(t) = \frac{1}{2}(e^{\mathrm{i}t} + e^{-\mathrm{i}t})$$

und finde damit eine Funktion f mit

$$\frac{\sin^2(t)}{1 + a\cos(t)} = f(e^{\mathrm{i}t})e^{\mathrm{i}t}.$$

Also:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin^2(t)}{1 + a\cos(t)} &= \frac{-\frac{1}{4}(e^{\mathrm{i}t} - e^{\mathrm{i}t})^2}{1 + \frac{1}{2}a(e^{\mathrm{i}t} + e^{-\mathrm{i}t})} \\
&= -\frac{(e^{\mathrm{i}t} - e^{-\mathrm{i}t})}{4 + 2a(e^{\mathrm{i}t} + e^{-\mathrm{i}t})} \\
&= \frac{(e^{2\mathrm{i}t} - 1)^2}{e^{2\mathrm{i}t}(2ae^{2\mathrm{i}t} + 4e^{\mathrm{i}t} + 2a)} e^{\mathrm{i}t} \\
&= f(e^{\mathrm{i}t})e^{\mathrm{i}t}
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
f(z) &= -\frac{(z^2 - 1)^2}{z^2(2az^2 + 4z + 2a)} \\
&= -\frac{(z^2 - 1)^2}{2az^2(z^2 + \frac{2}{a}z + 1)}.
\end{aligned}$$

Hierdurch wird eine holomorphe Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0, z_1, z_2\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

definiert, wobei z_1 und z_2 die beiden Lösungen der Gleichung

$$z^2 + \frac{2}{a}z + 1 = 0$$

sind, also

$$z_1 = -\frac{1}{a} + \sqrt{\frac{1}{a^2} - 1} \qquad \text{und} \qquad z_2 = -\frac{1}{a} - \sqrt{\frac{1}{a^2} - 1}.$$

Es gilt demnach:

- $z_1 \neq z_2 \qquad (\text{da } a \neq 1)$

- Wir haben
$$\left(\frac{1}{a}-1\right)^2 < \underbrace{\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{a}+1\right)}_{=\frac{1}{a^2}-1} < \left(\frac{1}{a}+1\right)^2$$
  und damit die Abschätzung
$$\frac{1}{a}-1 < \sqrt{\frac{1}{a^2}-1} < \frac{1}{a}+1,$$
  woraus sich unmittelbar die beiden Aussagen
$$z_1 = -\frac{1}{a}+\sqrt{\frac{1}{a^2}-1} \in (-1,1)$$
  und
$$z_2 = -\frac{1}{a}-\sqrt{\frac{1}{a^2}-1} \in \left(-1-\frac{2}{a}, 1-\frac{2}{a}\right) \subset \mathbb{R}\setminus[-1,1]$$
  über die Lage von z_1 und z_2 ergeben.

Damit haben wir
$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(t)}{1+a\cos(t)}\,dt = \int_0^{2\pi} f(e^{\mathrm{i}t})e^{\mathrm{i}t}\,dt = \frac{1}{\mathrm{i}}\int_{\gamma_{0,1,\circlearrowleft}} f(z)\,dz$$
und nach dem Residuensatz gilt (mit $\gamma := \gamma_{0,1,\circlearrowleft}$)
$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma f(z)\,dz &= \sum_{z\in\{0,z_1,z_2\}} \mathrm{Ind}_\gamma(z)\mathrm{Res}(f;z)\\ &= \mathrm{Res}(f;0)+\mathrm{Res}(f;z_1),\end{aligned}$$
wobei 0 einen Pol zweiter Ordnung und z_1 einen Pol erster Ordnung von f darstellt. Mithilfe der Rechenregeln aus Satz 9.4 können wir die Residuen daher wie folgt bestimmen:
$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f;0) &= \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(z^2 f(z)\right)\\ &= \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(-\frac{(z^2-1)^2}{2a(z^2+\frac{2}{a}z+1)}\right)\\ &= \lim_{z\to 0}\left(-\frac{1}{2a}\frac{4z(z^2-1)(z^2+\frac{2}{a}+1)-(z^2-1)^2(2z+\frac{2}{a})}{(z^2+\frac{2}{a}z+1)^2}\right)\\ &= -\frac{1}{2a}\left(-\frac{2}{a}\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{a^2}$$

sowie

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f; z_1) &= \lim_{z \to z_1} (z - z_1) f(z) \\ &= \lim_{z \to z_1} \left(- \frac{(z^2 - 1)^2}{2az^2(z - z_2)} \right) \\ &= - \frac{(z_1^2 - 1)^2}{2az_1^2(z_1 - z_2)}.\end{aligned}$$

Wir beachten, dass wegen $z_1^2 + \frac{2}{a} z_1 - 1 = 0$ gilt

$$\frac{(z_1^2 - 1)^2}{z_1^2} = \frac{(z_1^2 + 1)^2 - 4z_1^2}{z_1^2} = \frac{(-\frac{2}{a} z_1)^2 - 4z_1^2}{z_1^2} = 4 \left(\frac{1}{a^2} - 1 \right),$$

und ferner, dass $z_1 - z_2 = 2\sqrt{\frac{1}{a^2} - 1}$, woraus sich schließlich ergibt:

$$\operatorname{Res}(f; z_1) = - \frac{1}{2a} 4 \left(\frac{1}{a^2} - 1 \right) \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{a^2} - 1}} = - \frac{1}{a} \sqrt{\frac{1}{a^2} - 1}.$$

Zusammenfassend haben wir also

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(t)}{1 + a\cos(t)}\, dt &= \frac{1}{\mathrm{i}} \int_\gamma f(z)\, dz \\ &= 2\pi \big(\operatorname{Res}(f; 0) + \operatorname{Res}(f; z_1) \big) \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a} \sqrt{\frac{1}{a^2} - 1} \right).\end{aligned}$$

Mit dieser Vorgehensweise lassen sich Integrale der Form

$$\int_0^{2\pi} \frac{P\big(\sin(t), \cos(t)\big)}{Q\big(\sin(t), \cos(t)\big)}\, dt$$

für Polynome $P, Q \in \mathbb{C}[x, y]$ bestimmen, falls Q auf

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

keine Nullstelle hat.

Beispiel 9.7: Wir wollen das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$$

berechnen. Hierzu betrachten wir die holomorphe Funktion

$$f : \mathbb{C}\setminus\{-\mathrm{i},\mathrm{i}\} \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad z \longmapsto \frac{1}{(1+z^2)^2}$$

sowie für $R > 0$ den geschlossenen, stückweise glatten Weg

$$\gamma_R := \gamma_{1,R} + \gamma_{2,R},$$

der gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \gamma_{1,R} : [-R, R] &\longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad t \longmapsto t \\ \gamma_{2,R} : [0, \pi] &\longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad t \longmapsto Re^{\mathrm{i}t} \end{aligned}$$

Siehe hierzu Abbildung 9.2.

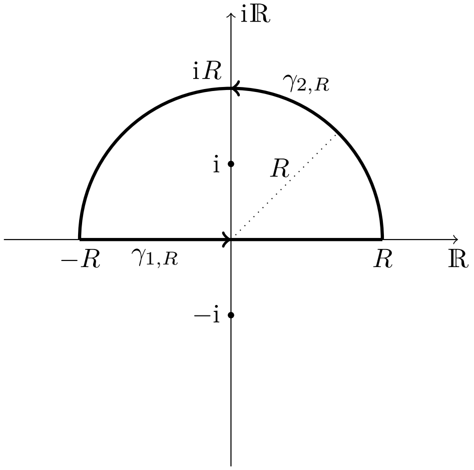


Abbildung 9.2.: Skizze des Weges γ_R aus Beispiel 9.7

Für $R > 1$ gilt

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_R}(\mathrm{i}) = 1 \quad , \quad \mathrm{Ind}_{\gamma_R}(-\mathrm{i}) = 0,$$

sodass der Residuensatz liefert

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \mathrm{Res}(f;\mathrm{i}),$$

und da i (wie auch $-\mathrm{i}$) eine Polstelle zweiter Ordnung von f ist, haben wir

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f;\mathrm{i}) &= \lim_{z\to\mathrm{i}} \frac{d}{dz}\big((z-\mathrm{i})^2 f(z)\big)\\
&= \lim_{z\to\mathrm{i}} \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(z+\mathrm{i})^2}\right)\\
&= \lim_{z\to\mathrm{i}} \left(-2\frac{1}{(z+\mathrm{i})^3}\right)\\
&= -2\frac{1}{(2\mathrm{i})^3}\\
&= \frac{1}{4\mathrm{i}}.
\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_R} f(z)\,dz &= \int_{\gamma_{1,R}} f(z)\,dz + \int_{\gamma_{2,R}} f(z)\,dz\\
&= \int_{-R}^{R} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx + \int_{\gamma_{2,R}} f(z)\,dz,
\end{aligned}$$

wobei wir gemäß Bemerkung 2.13

$$\left|\int_{\gamma_{2,R}} f(z)\,dz\right| \le \underbrace{L(\gamma_{2,R})}_{=\pi R}\|f\|_{\gamma_{2,R}^*}$$

mit

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\gamma_{2,R}^*} &= \max_{t\in[0,\pi]} |f(Re^{\mathrm{i}t})|\\
&= \max_{t\in[0,\pi]} \frac{1}{|1+R^2e^{2\mathrm{i}t}|^2} \overset{t=\frac{\pi}{2}}{=} \frac{1}{(R^2-1)^2},
\end{aligned}$$

erhalten, sodass schließlich folgt

$$\left|\int_{\gamma_{2,R}} f(z)\,dz\right| \le \frac{\pi R}{(R^2-1)^2} \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx &= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx\\
&= \lim_{R\to\infty}\Big(\underbrace{\int_{\gamma_R} f(z)\,dz}_{=2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}(f;\mathrm{i})=\frac{\pi}{2}} - \int_{\gamma_{2,R}} f(z)\,dz\Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{2} - \underbrace{\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_{2,R}} f(z)\,dz}_{=0} \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

Aus diese Weise lassen sich Integrale der Gestalt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

für Polynome $P, Q \in \mathbb{C}[x]$ mit

$$\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$$

und auf $\mathbb{R}$ nullstellenfreiem Q berechnen.

Beispiel 9.8: Wir wollen nun das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(x)}{1+x^2}\,dx = \lim_{\substack{R_1\to\infty\\ R_2\to\infty}} \int_{-R_1}^{R_2} \frac{x\sin(x)}{1+x^2}\,dx$$

berechnen (und dabei insbesondere die Konvergenz nachweisen). Hierzu betrachten wir die holomorphen Funktionen

$$f, g : \mathbb{C} \setminus \{-\mathrm{i}, \mathrm{i}\} \longrightarrow \mathbb{C},$$

die gegeben sind durch

$$f(z) := \frac{z}{1+z^2} e^{\mathrm{i}z} \quad , \quad g(z) := \frac{z}{1+z^2}$$

sowie für $R_1, R_2, R_3 > 0$ den geschlossenen, stückweise glatten Weg

$$\gamma_{\underline{R}} := \gamma_{1,\underline{R}} + \gamma_{2,\underline{R}} + \gamma_{3,\underline{R}} + \gamma_{4,\underline{R}} \qquad , \qquad \underline{R} = (R_1, R_2, R_3),$$

dessen Teilwege gegeben sind durch

$$
\begin{aligned}
\gamma_{1,\underline{R}} &: [-R_1, R_2] &&\longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad t \longmapsto t, \\
\gamma_{2,\underline{R}} &: [0, R_3] &&\longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad t \longmapsto R_2 + \mathrm{i}t, \\
\gamma_{3,\underline{R}} &: [-R_2, R_1] &&\longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad t \longmapsto -t + \mathrm{i}R_3, \\
\gamma_{4,\underline{R}} &: [0, R_3] &&\longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad t \longmapsto -R_1 + \mathrm{i}(R_3 - t).
\end{aligned}
$$

Siehe hierzu Abbildung 9.3.

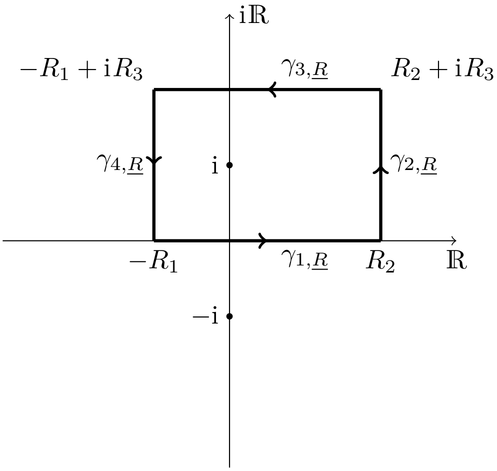


Abbildung 9.3.: Skizze des Weges $\gamma_{\underline{R}}$ aus Beispiel 9.8

Für $R_3 > 1$ gilt $\operatorname{Ind}_{\gamma_{\underline{R}}}(\mathrm{i}) = 1$ und $\operatorname{Ind}_{\gamma_{\underline{R}}}(-\mathrm{i}) = 0$, sodass der Residuensatz liefert:

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_{\underline{R}}} f(z)\,dz = \operatorname{Res}(f;\mathrm{i}).$$

Da i (wie auch $-\mathrm{i}$) eine Polstelle erster Ordnung von f ist, erhalten wir mit Satz 9.4, dass

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f;i) &= \lim_{z\to\mathrm{i}} (z-\mathrm{i}) f(z)\\ &= \lim_{z\to\mathrm{i}} \frac{z}{z+\mathrm{i}} e^{\mathrm{i}z} = \frac{1}{2e}.\end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_{\underline{R}}} f(z)\,dz &= \sum_{j=1}^{4} \int_{\gamma_{j,\underline{R}}} f(z)\,dz\\ &= \int_{-R_1}^{R_2} \frac{xe^{\mathrm{i}x}}{1+x^2}\,dx + \sum_{j=2}^{4} \int_{\gamma_{j,\underline{R}}} f(z)\,dz\,.\end{aligned}$$

Wir beobachten nun:

$$\int_{\gamma_{2,\underline{R}}} f(z)\,dz = \mathrm{i} \int_0^{R_3} f(R_2 + \mathrm{i}t)\,dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{i} \int_0^{R_3} g(R_2 + \mathrm{i}t) e^{\mathrm{i}(R_2 + \mathrm{i}t)}\, dt \\
&= \mathrm{i} e^{\mathrm{i} R_2} \int_0^{R_3} g(R_2 + \mathrm{i}t) e^{-t}\, dt
\end{aligned}
$$

$$
\implies \quad \left| \int_{\gamma_{2,\underline{R}}} f(z)\, dz \right| \le \|g\|_{\gamma^*_{2,\underline{R}}} \int_0^{R_3} e^{-t}\, dt = (1 - e^{-R_3}) \|g\|_{\gamma^*_{2,\underline{R}}}
$$

und analog (mithilfe der Substitution $s = R_3 - t$)

$$
\begin{aligned}
\int_{\gamma_{4,\underline{R}}} f(z)\, dz &= -\mathrm{i} \int_0^{R_3} f(-R_1 + \mathrm{i}(R_3 - t))\, dt \\
&= -\mathrm{i} \int_0^{R_3} f(-R_1 + \mathrm{i}s)\, ds \\
&= -\mathrm{i} \int_0^{R_3} g(-R_1 + \mathrm{i}s) e^{\mathrm{i}(-R_1 + \mathrm{i}s)}\, ds \\
&= -\mathrm{i} e^{-\mathrm{i} R_1} \int_0^{R_3} g(-R_1 + \mathrm{i}s) e^{-s}\, ds
\end{aligned}
$$

$$
\implies \quad \left| \int_{\gamma_{4,\underline{R}}} f(z)\, dz \right| \le \|g\|_{\gamma^*_{4,\underline{R}}} \int_0^{R_3} e^{-s}\, ds = (1 - e^{-R_3}) \|g\|_{\gamma^*_{4,\underline{R}}}.
$$

Ferner gilt

$$
\begin{aligned}
\int_{\gamma_{3,\underline{R}}} f(z)\, dz &= -\int_{-R_2}^{R_1} f(-t + \mathrm{i}R_3)\, dt \\
&= -\int_{-R_2}^{R_1} g(-t + \mathrm{i}R_3) e^{\mathrm{i}(-t + \mathrm{i}R_3)}\, dt \\
&= -e^{-R_3} \int_{-R_2}^{R_1} g(-t + \mathrm{i}R_3) e^{-\mathrm{i}t}\, dt,
\end{aligned}
$$

$$
\implies \quad \left| \int_{\gamma_{3,\underline{R}}} f(z)\, dz \right| \le e^{-R_3} (R_1 + R_2) \|g\|_{\gamma^*_{3,\underline{R}}}
$$

Wir fordern nun, dass

$$
R_3 = R_1 + R_2.
$$

Zusammenfassend haben wir dann

$$
\int_{-R_1}^{R_2} \frac{x \sin(x)}{1 + x^2}\, dx = \operatorname{Im} \left(\int_{-R_1}^{R_2} \frac{x e^{\mathrm{i}x}}{1 + x^2} \right)
$$

$$= \operatorname{Im}\Big(\underbrace{\int_{\gamma_{\underline{R}}} f(z)\,dz}_{=2\pi \mathrm{i} \operatorname{Res}(f;\mathrm{i}) = \mathrm{i}\frac{\pi}{e}} \; \underbrace{- \sum_{j=2}^{4} \int_{\gamma_{j,\underline{R}}} f(z)\,dz}_{\to 0 \text{ für } R_1,R_2\to\infty} \Big)$$

$$\xrightarrow{R_1,R_2\to\infty} \operatorname{Im}\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{e}\right) = \frac{\pi}{e}$$

Dabei haben wir verwendet, dass

$$\lim_{R_1,R_2\to\infty} \sum_{j=2}^{4} \int_{\gamma_{j,\underline{R}}} f(z)\,dz = 0.$$

Dies ergibt sich unmittelbar aus den oben bewiesenen Abschätzungen für die Integrale $\int_{\gamma_{j,\underline{R}}} f(z)\,dz$ mit $j = 2,3,4$, denn wegen

$$\lim_{|z|\to\infty} g(z) = 0$$

haben wir insbesondere

$$\|g\|_{\gamma^*_{j,\underline{R}}} \to 0 \qquad \text{für} \quad R_1, R_2 \to \infty$$

für $j = 2,3,4$.

Damit ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(x)}{1+x^2}\,dx = \lim_{R_1,R_2\to\infty} \int_{-R_1}^{R_2} \frac{x\sin(x)}{1+x^2} = \frac{\pi}{e}.$$

Auf diese Weise lassen sich Integrale der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin(x)\,dx \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(x)\,dx$$

für $P,Q \in \mathbb{R}[x]$ mit $\deg(Q) \geq \deg(P) + 1$ und auf $\mathbb{R}$ nullstellenfreiem Q berechnen.

Allgemeiner können auch Integrale der Art

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x}\,dx$$

mit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $P,Q \in \mathbb{C}[x]$ berechnet werden, falls $\deg(Q) \geq \deg(P)+1$ gilt und Q auf $\mathbb{R}$ keine Nullstellen besitzt. (Man beachte, dass der Weg $\gamma_{\underline{R}}$ im Fall $\alpha < 0$ an der reellen Achse gespiegelt werden muss.)

10. Das Argumentprinzip und der Satz von Rouché

Als eine der wichtigsten Anwendungen der Residuensatzes (Satz 9.2) behandeln wir in diesem Kapitel das sogenannte Argumentprinzip, mit dessen Hilfe Null- und Polstellen holomorpher Funktionen „gezählt" werden können.

Lemma 10.1: *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $z_0 \in \Omega$. Die Funktion $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ besitze in z_0 eine Nullstelle der Ordnung $m = \operatorname{ord}(f, z_0) \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}; z_0\right) = m = \operatorname{ord}(f; z_0).$$

Beweis: Nach Korollar 5.5 finden wir eine Funktion $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ mit $g(z_0) \neq 0$, sodass gilt

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) \qquad \forall\, z \in \Omega.$$

Damit ist

$$f'(z) = m(z - z_0)^{m-1} g(z) + (z - z_0)^m g'(z) \qquad \forall\, z \in \Omega$$

und

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)} \qquad \forall\, z \in D^{\bullet}(z_0, r), \tag{10.1}$$

wobei $r > 0$ so gewählt ist, dass $D(z_0, r) \subseteq \Omega$ gilt und $g|_{D(z_0,r)}$ keine Nullstelle hat.

Insbesondere ist $\frac{g'}{g}$ auf $D(z_0, r)$ holomorph, sodass Gl. (10.1) die Laurentzerlegung von $\frac{f'}{f}$ auf $R(z_0; 0, r) = D^{\bullet}(z_0, r)$ darstellt.

Somit ist

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}; z_0\right) = m.$$

■

Sei $\varnothing \neq G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{O}(G)$ mit $f \not\equiv 0$. Ist Γ ein nullhomologer Zyklus in G mit $\Gamma^* \cap \mathcal{N}(f) = \varnothing$, dann besagt der Residuensatz (Satz 9.2), dass

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz \quad &= \quad \sum_{z \in \mathcal{N}(f)} \operatorname{Ind}_\Gamma(z) \operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}; z\right) \\ &\overset{\text{Lemma 10.1}}{=} \sum_{z \in \mathcal{N}(f)} \operatorname{Ind}_\Gamma(z) \operatorname{ord}(f; z). \end{aligned}$$

Dies verallgemeinert die Aussage von Aufgabe 5, Blatt 10. Man beachte, dass $\mathcal{N}(f) = f^{-1}(\{0\})$ wegen $f \not\equiv 0$ nach dem Identitätssatz (vgl. Satz 5.4) diskret in G ist.

Eine solche Aussage gilt allgemeiner auch für die *meromorphen Funktionen*.

Definition 10.2: Sei $\varnothing \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine *meromorphe Funktion auf* Ω ist eine holomorphe Funktion $f : \Omega \setminus \mathcal{S}(f) \to \mathbb{C}$, wobei $\mathcal{S}(f) \subset \Omega$ diskret in Ω ist, die in jedem Punkt aus $\mathcal{S}(f)$ einen Pol besitzt.

Die Menge aller meromorphen Funktionen auf Ω bezeichnen wir mit $\mathcal{M}(\Omega)$.

Bemerkung 10.3:

(i) Offenbar gilt $\mathcal{O}(\Omega) \subset \mathcal{M}(\Omega)$ mit $\mathcal{S}(f) = \varnothing$ für alle $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

(ii) $\mathcal{M}(\Omega)$ wird mit den punktweise definierten Operationen $+$ und $\cdot$ zu einem Ring.

Man beachte hierbei, dass

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(f+g) &\subseteq \mathcal{S}(f) \cup \mathcal{S}(g) \quad \text{und} \\ \mathcal{S}(f \cdot g) &\subseteq \mathcal{S}(f) \cup \mathcal{S}(g) \end{aligned}$$

gilt, wobei jeweils eine echte Inklusion auftreten kann, da die Singularitäten von $f+g$ und $f \cdot g$ hebbar sein können; in solchen Fällen versteht man $f+g$ bzw. $f \cdot g$ als die holomorphe Fortsetzung.

(iii) Ist $f \in \mathcal{M}(\Omega)$, so ist auch $f' \in \mathcal{M}(\Omega)$.

(iv) Ist $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, dann ist $\mathcal{M}(G)$ sogar ein Körper. Für $0 \neq f \in \mathcal{M}(G)$ ist

$$f^{-1} : G \setminus \mathcal{S}(f^{-1}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

mit $\mathcal{S}(f^{-1}) = \mathcal{N}(f)$ die holomorphe Fortsetzung von

$$f^{-1} : G \setminus \big(\mathcal{S}(f) \cup \mathcal{N}(f)\big) \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad z \longmapsto \frac{1}{f(z)}.$$

Aus Polen der Ordnung m von f werden dabei Nullstellen der Ordnung m von f^{-1}.

(v) Ist $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und ist $z_0 \in \Omega$, dann gilt:

$$\begin{aligned} &f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_0\}) \text{ hat einen Pol der Ordnung } m \\ &\quad \iff \exists\, g \in \mathcal{O}(\Omega) \text{ mit } g(z_0) \neq 0 : f(z) = (z - z_0)^{-m} g(z) \quad \forall\, z \in \Omega \setminus \{z_0\} \end{aligned}$$

In Anlehnung an Korollar 5.5 setzen wir daher $\operatorname{ord}(f; z_0) := -m$.

Lemma 10.4: *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $z_0 \in \Omega$. Die Funktion $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_0\})$ besitze in z_0 einen Pol der Ordnung m. Dann gilt*

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}; z_0\right) = -m = \operatorname{ord}(f; z_0).$$

Beweis: Unter Verwendung von Bemerkung 10.3 (v) zeigt man dies analog zum Beweis von Lemma 10.1. ∎

Satz 10.5 (Argumentprinzip): *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $0 \neq f \in \mathcal{M}(G)$ und Γ ein nullhomologer Zyklus in G mit $\Gamma^* \cap \big(\mathcal{N}(f) \cup \mathcal{S}(f)\big) = \varnothing$. Dann gilt:*

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{z \in \mathcal{N}(f) \cup \mathcal{S}(f)} \mathrm{Ind}_\Gamma(z) \mathrm{ord}(f; z).$$

Speziell haben wir: Ist Γ der Randzyklus *einer offenen Menge $V \subset G$, d. h. es gilt $\partial V = \Gamma^*$ und*

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = \begin{cases} 1, & \textit{falls } z \in V, \\ 0, & \textit{falls } z \notin \overline{V}, \end{cases}$$

dann gilt (gezählt mit Vielfachheiten)

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \#\{\textit{Nullstellen von } f \textit{ in } V\} - \#\{\textit{Polstellen von } f \textit{ in } V\}.$$

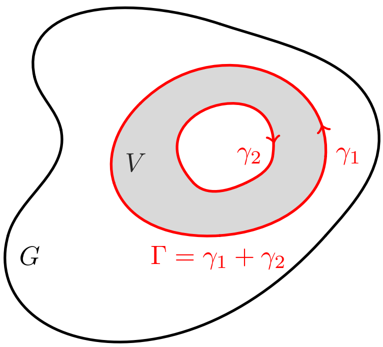


Abbildung 10.1.: Skizze zur Definition des Begriffs Randzyklus in Satz 10.5.

Beweis: Der Residuensatz (Satz 9.2) liefert

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz &= \sum_{z \in \mathcal{N}(f) \cup \mathcal{S}(f)} \mathrm{Ind}_\Gamma(z) \mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f}; z\right) \\ &\overset{\text{Lemma 10.1}}{\underset{\text{Lemma 10.4}}{=}} \sum_{z \in \mathcal{N}(f) \cup \mathcal{S}(f)} \mathrm{Ind}_\Gamma(z) \mathrm{ord}(f; z). \end{aligned}$$

Ist nun Γ der Randzyklus von $V \subset G$, dann rechnen wir weiter

$$\ldots = \sum_{z \in \mathcal{N}(f)} \mathrm{Ind}_\Gamma(z) \mathrm{ord}(f; z) + \sum_{z \in \mathcal{S}(f)} \mathrm{Ind}_\Gamma(z) \mathrm{ord}(f; z)$$

$$= \Big(\sum_{z \in \mathcal{N}(f) \cap V} \operatorname{ord}(f;z) \Big) - \Big(- \sum_{z \in \mathcal{S}(f) \cap V} \operatorname{ord}(f;z) \Big)$$
$$= \#\{\text{Nullstellen von } f \text{ in } V\} - \#\{\text{Polstellen von } f \text{ in } V\}. \qquad \blacksquare$$

Korollar 10.6 (Satz von Rouché, E. Rouche, 182): *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und seien $f, g \in \mathcal{O}(G)$. Weiter sei Γ der Randzyklus einer offenen Menge $V \subset G$. Es gelte*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \quad \forall\, z \in \Gamma^* = \partial V. \tag{10.2}$$

Dann besitzen f und g beide nur endlich viele Nullstellen in V und es gilt

$$\#\{\textit{Nullstellen von } f \textit{ in } V\} = \#\{\textit{Nullstellen von } g \textit{ in } V\}.$$

Beweis: Wegen Gl. (10.2) können auf Γ^* keine Nullstellen von f und g liegen. Insbesondere gilt $f, g \not\equiv 0$, sodass $\mathcal{N}(f)$ und $\mathcal{N}(g)$ nach Satz 5.3 beide diskret in G sind. Da $\overline{V}$ kompakt ist, sind somit die beiden Mengen

$$\mathcal{N}(f) \cap \overline{V} = \mathcal{N}(f) \cap V \qquad \text{und} \qquad \mathcal{N}(g) \cap \overline{V} = \mathcal{N}(g) \cap V$$

endlich. Wir betrachten nun für $t \in [0,1]$

$$h_t := f + t(g - f) \in \mathcal{O}(G).$$

Dann gilt $h_0 = f$, $h_1 = g$ und ferner für alle $z \in \Gamma^*$

$$|h_t(z)| \geq |f(z)| - t \underbrace{|g(z) - f(z)|}_{\overset{\text{Gl. (10.2)}}{<} |f(z)|} > 0,$$

d. h. wir haben $h_t(z) \neq 0$ für alle $z \in \Gamma^*$. Damit liefert Satz 10.5

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{h_t'(z)}{h_t(z)}\, dz = \#\{\text{Nullstellen von } h_t \text{ in } V\} \in \mathbb{N}_0.$$

Da die Funktion

$$I : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad t \mapsto \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{h_t'(z)}{h_t(z)}\, dz$$

somit nur Werte in $\mathbb{N}_0$ annimmt und zudem offenbar stetig ist, muss diese konstant sein. Also:

$$\#\{\text{Nullstellen von } f \text{ in } V\} = I(0) = I(1) = \#\{\text{Nullstellen von } g \text{ in } V\}. \qquad \blacksquare$$

Beispiel 10.7: Wir betrachten $G = \mathbb{C}$ und

$$g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad z \longmapsto z^4 - 4z + 2$$
$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad z \longmapsto - 4z + 2$$

sowie $V = D(0,1)$ mit dem Randzyklus $\Gamma = \gamma_{0,1,\circlearrowleft}$ gilt nun für alle $z \in \Gamma^* = \partial V = \partial D(0,1)$:

$$|f(z) - g(z)| = |z^4| = 1 < 2 \leq |-4z + 2| = |f(z)|$$

Der Satz von Roché besagt dann, dass

$$\#\{\text{Nullstellen von } g \text{ in } D(0,1)\} = \#\{\text{Nullstellen von } f \text{ in } D(0,1)\} = 1,$$

da $z = \frac{1}{2}$ offensichtlich die einzige Nullstelle von f (mit Vielfachheit 1) ist, die überdies in $D(0,1)$ liegt.

11. Der Satz von Montel

Der Satz von Montel ist die holomorphe Version des aus der Analysis II bekannten Satzes von Arzelà-Ascoli. Er charakterisiert die relativkompakten Teilmengen von $\mathcal{O}(\Omega)$.

Hierfür benötigen wir einige topologische Vorbereitungen. Wir zeigen zunächst, dass die kompakte Konvergenz auf Ω (vgl. Definition 4.1) durch eine Metrik auf $\mathscr{C}(\Omega)$ induziert wird.

Satz 11.1: *Sei $\varnothing \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ eine* kompakte Ausschöpfung *von Ω, d. h. eine Folge von kompakten Teilmengen $K_n \subset \Omega$, sodass*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}: \quad K_n \subset \operatorname{int}(K_{n+1}) \subset K_{n+1} \subset \Omega = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m.$$

Dann definiert

$$d(f,g) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\|f-g\|_{K_n}}{1+\|f-g\|_{K_n}}, \quad f,g \in \mathscr{C}(\Omega)$$

eine Metrik d auf $\mathscr{C}(\Omega)$ und für jede Folge $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ in $\mathscr{C}(\Omega)$ gilt:

- *$(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ist genau dann eine Cauchy-Folge bezüglich kompakter Konvergenz auf Ω, wenn $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge in $(\mathscr{C}(\Omega), d)$ ist.*
- *$(f_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert genau dann kompakt auf Ω gegen eine (stetige) Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$, wenn $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ gegen f in $(\mathscr{C}(\Omega), d)$ konvergiert.*

Beweis: Die Existenz einer kompakten Ausschöpfung haben wir bereits im Beweis von Korollar 5.6 gezeigt. Die Behauptungen des Satzes rechnet man leicht nach. ■

Bemerkung 11.2:

(i) Aus Lemma 4.2 (ii) folgt, dass der metrische Raum $(\mathscr{C}(\Omega), d)$ vollständig ist.

(ii) Der Satz von Weierstraß (Satz 4.3) besagt, dass $\mathcal{O}(\Omega) \subset \mathscr{C}(\Omega)$ abgeschlossen und somit ebenfalls vollständig ist, und dass die Abbildung

$$\frac{d}{dz} : \mathcal{O}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{O}(\Omega) \quad , \quad f \longmapsto f'$$

stetig ist bezüglich $d|_{\mathcal{O}(\Omega)\times\mathcal{O}(\Omega)}$.

Damit können wir den angekündigten Satz formulieren.

Satz 11.3 (von Montel, P. Montel, 1916): *Sei $\varnothing \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Für eine beliebige Teilmenge $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(\Omega)$ sind äquivalent:*

(i) $\mathcal{F}$ *ist* relativkompakt in $\mathcal{O}(\Omega)$, *d. h. jede Folge aus $\mathcal{F}$ besitzt eine kompakt konvergente Teilfolge; man sagt auch*

„$\mathcal{F}$ *ist eine* normale Familie.“

(ii) $\mathcal{F}$ *ist* lokalbeschränkt, *d. h. für jede kompakte Menge $K \subset \Omega$ gilt*

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_K < \infty. \tag{11.1}$$

Für den Beweis benötigen wir jedoch etwas Vorarbeit.

Lemma 11.4: *Sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(\Omega)$ lokalbeschränkt. Dann ist f* lokal gleichgradig stetig, *d. h. es gilt*

$$\begin{aligned} &\forall\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, z \in \Omega \quad \exists\, \delta = \delta(z, \varepsilon) > 0 \quad \forall\, f \in \mathcal{F}: \\ &\qquad\qquad \forall\, w_1, w_2 \in \overline{D(z,\delta)} \subset \Omega: \quad |f(w_1) - f(w_2)| < \varepsilon. \end{aligned} \tag{11.2}$$

Beweis: Seien $\varepsilon > 0$ und $z \in \Omega$ gegeben. Wir wählen $r > 0$, sodass $\overline{D(z, 2r)} \subset \Omega$. Weiter finden wir wegen Gl. (11.1), angewendet auf die kompakte Menge $K = \partial D(z, 2r)$, ein $M > 0$ mit

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_{\partial D(z,2r)} < M < \infty.$$

Wir setzen nun

$$\delta := \min\left\{\frac{r}{4M}\varepsilon, r\right\} > 0$$

und rechnen nach, dass damit $|f(w_1) - f(w_2)| < \varepsilon$ für alle $f \in \mathcal{F}$ und für alle $w_1, w_2 \in \overline{D(z,\delta)}$ gilt. (Man beachte, dass nach Wahl von δ tatsächlich $\overline{D(z,\delta)} \subseteq \overline{D(z,r)} \subset D(z, 2r) \subset \Omega$ erfüllt ist.) Hierzu gehen wir wie folgt vor: Wir setzen zur Abkürzung $\gamma := \gamma_{z,2r,\circlearrowleft}$. Zunächst bemerken wir, dass

$$\begin{aligned} f(w_1) - f(w_2) &\overset{\text{Satz 2.22}}{=} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma f(\zeta) \left[\frac{1}{\zeta - w_1} - \frac{1}{\zeta - w_2}\right] d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma f(\zeta) \frac{w_1 - w_2}{(\zeta - w_1)(\zeta - w_2)}\, d\zeta, \end{aligned}$$

woraus wir mithilfe von Bemerkung 2.13 folgern, dass

$$\begin{aligned} |f(w_1) - f(w_2)| &\leq \frac{L(\gamma)}{2\pi} \|f\|_{\gamma^*} \frac{1}{r^2} |w_1 - w_2| \\ &= \frac{2}{r} \|f\|_{\gamma^*} |w_1 - w_2|. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir verwendet, dass $|\zeta - w_1| \geq r$ und $|\zeta - w_2| \geq r$ für alle $\zeta \in \gamma^* = \partial D(z, 2r)$ und $w_1, w_2 \in \overline{D(z,\delta)} \subset \overline{D(z,r)}$ gilt. Damit folgt nun wie gewünscht

$$|f(w_1) - f(w_2)| \leq \frac{4M}{r}\delta \leq \varepsilon,$$

da $\|f\|_{\gamma^*} = \|f\|_{\partial D(z,2r)} < M$ und $|w_1 - w_2| < 2\delta$. Es gilt also Gl. (11.2). ∎

Wir benötigen ferner die folgende Variante des Satzes von Arzelà-Ascoli.

Proposition 11.5: *Sei $\mathcal{F}$ eine Teilmenge von $\mathscr{C}(\Omega)$ mit den beiden Eigenschaften*

(i) *$\mathcal{F}$ ist* punktweise beschränkt, *d. h.*

$$\forall\, z \in \Omega: \quad \sup_{f\in\mathcal{F}} |f(z)| < \infty, \tag{11.3}$$

(ii) *$\mathcal{F}$ ist lokal gleichgradig stetig.*

Dann ist $\mathcal{F}$ relativkompakt in $\mathscr{C}(\Omega)$, d. h. jede Folge in $\mathcal{F}$ besitzt eine kompakt konvergente Teilfolge.

Beweis: Wir setzen $\Omega_{\mathbb{Q}} := \Omega \cap \{x + \mathrm{i}y \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$. Dann ist $\Omega_{\mathbb{Q}}$ abzählbar und dicht in Ω; sei $(z_n)_{n=1}^\infty$ eine Abzählung von $\Omega_{\mathbb{Q}}$.

Betrachte nun eine beliebige Folge $(f_n)_{n=1}^\infty$ in $\mathcal{F}$.

① *Behauptung: Es gibt eine Teilfolge von $(f_n)_{n=1}^\infty$, die in allen Punkten aus $\Omega_{\mathbb{Q}}$ konvergiert.*

Wegen (i) ist $\big(f_n(z_1)\big)_{n=1}^\infty$ beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß gibt es eine konvergente Teilfolge $\big(f_{n_1(k)}(z_1)\big)_{k=1}^\infty$.

Induktiv: Die Teilfolge $\big(f_{n_j(k)}\big)_{k=1}^\infty$, die in den Punkten $z_1, \dots, z_j$ konvergiert, besitzt eine Teilfolge $\big(f_{n_{j+1}(k)}\big)_{k=1}^\infty$, die zusätzlich im Punkt z_{j+1} konvergiert.

$\Longrightarrow$ $\big(f_{n_k(k)}\big)_{k=1}^\infty$ ist eine Teilfolge von $(f_n)_{n=1}^\infty$, die in allen Punkten aus $\Omega_{\mathbb{Q}}$ konvergiert (Diagonalfolgenargument).

② Die Teilfolge aus ① bezeichnen wir wieder mit $(f_n)_{n=1}^\infty$.

Behauptung: $(f_n)_{n=1}^\infty$ ist eine Cauchy-Folge bezüglich kompakter Konvergenz auf Ω.

Sei $K \subset \Omega$ kompakt und $\varepsilon > 0$ beliebig.

- Da $\mathcal{F}$ lokal gleichgradig stetig ist, gibt es zu jedem $z \in \Omega$ ein $\delta(z) > 0$, sodass

$$\forall\, w_1, w_2 \in \overline{D(z, \delta(z))} \subset \Omega \quad \forall\, f \in \mathcal{F}: \qquad |f(w_1) - f(w_2)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

  Wähle aus der offenen Überdeckung $\big(D(z, \delta(z))\big)_{z\in\Omega}$ von K eine endliche Teilüberdeckung $\big(D(z_j, \delta(z_j))\big)_{j=1}^k$.
- Da $\Omega_{\mathbb{Q}}$ dicht in Ω liegt, gibt es für $j = 1, \dots, k$ ein $z_j' \in D(z_j, \delta(z_j)) \cap \Omega_{\mathbb{Q}}$. Wegen ① finden wir $N_j \in \mathbb{N}$, sodass

$$|f_n(z_j') - f_m(z_j')| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall\, n, m \in \mathbb{N}_j.$$

  Wir setzen $N := \max\{N_1, \dots, N_k\}$.
- Ist nun $z \in K$ gegeben, dann gibt es ein $j \in \{1, \dots, k\}$ mit $z \in D(z_j, \delta(z_j))$. Damit folgt für alle $n, m \geq N$:

$$\begin{aligned} |f_n(z) - f_m(z)| &\leq |f_n(z) - f_n(z_j')| + |f_n(z_j') - f_m(z_j')| + |f_m(z_j') - f_m(z)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

$$\implies \|f_n - f_m\|_K < \varepsilon \qquad \forall\, m,n \geq N$$

Nach Lemma 4.2 (ii) ist $(f_n)_{n=1}^\infty$ kompakt konvergent gegen ein $f \in \mathscr{C}(\Omega)$. ■

Beweis (von Satz 11.3):

(i) ⇒ (ii): *Annahme: Es existiert eine kompakte Menge $K \subset \Omega$, sodass*

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \|f\|_K = \infty$$

$$\implies \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, f_n \in \mathcal{F}: \qquad \|f_n\|_K \geq n$$

$\implies$ $(f_n)_{n=1}^\infty$ kann *keine* kompakt konvergente Teilfolge besitzen (da diese auch auf K gleichmäßig konvergieren müsste).

Dies steht im Widerspruch zu (i). Also ist $\mathcal{F}$ lokalbeschränkt.

(ii) ⇒ (i): Sei $\mathcal{F}$ ist lokalbeschränkt. Dann gilt:

- $\mathcal{F}$ ist lokal gleichgradig stetig (nach Lemma 11.4).
- $\mathcal{F}$ ist punktweise beschränkt (nach (ii), da die Menge $K := \{z\}$ kompakt ist für alle $z \in \Omega$).

Mithilfe von Proposition 11.5 schließen wir, dass $\mathcal{F}$ relativkompakt in $\mathscr{C}(\Omega)$ und somit nach 4.3 auch relativkompakt in $\mathcal{O}(\Omega)$ ist. ■

Beispiel 11.6:

(i) Sei $\varnothing \neq \Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Betrachte eine stetige Funktion $\omega : \Omega \to [0,\infty)$. Dann ist die Menge

$$\mathcal{F} := \{f \in \mathcal{O}(\Omega) \mid \forall\, z \in \Omega : |f(z)| \leq \omega(z)\}$$

lokalbeschränkt, denn es gilt

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \|f\|_K \leq \max_{z\in K} \omega(z) < \infty$$

für jede kompakte Menge K in Ω. Nach Satz 11.3 ist $\mathcal{F}$ somit relativkompakt. (Man sieht leicht, dass $\mathcal{F}$ abgeschlossen ist bezüglich kompakter Konvergenz auf Ω. Daher ist $\mathcal{F}$ nicht nur relativkompkat sondern sogar kompakt in $\mathcal{O}(\Omega)$.)

(ii) Ist nun $z_0 \in \Omega$ gewählt, dann gibt es eine Funktion $f_0 \in \mathcal{F}$, sodass

$$|f_0'(z_0)| = \sup_{f\in\mathcal{F}} |f'(z_0)|.$$

Wähle $(f_n)_{n=1}^\infty$ aus $\mathcal{F}$ mit

$$|f_n'(z_0)| \longrightarrow \sup_{f\in\mathcal{F}} |f'(z_0)| \in [0,\infty] \qquad \text{für } n \to \infty.$$

(man beachte, dass $\mathcal{F} \neq \varnothing$, da $0 \in \mathcal{F}$). Da $\mathcal{F}$ relativkompakt ist, gibt es eine kompakt konvergente Teilfolge $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ mit Grenzfunktion $f_0 \in \mathcal{O}(\Omega)$, wobei hier notwendigerweise sogar $f_0 \in \mathcal{F}$ gelten muss.

Ferner besagt der Satz von Weierstraß (Satz 4.3):

$$f'_{n_k}(z_0) \longrightarrow f'_0(z_0) \qquad \text{für } k \to \infty$$

Also:

$$\begin{aligned} |f'_{n_k}(z_0)| &\longrightarrow |f'_0(z_0)| && \text{für } k \to \infty \\ |f'_n(z_0)| &\longrightarrow \sup_{f\in\mathcal{F}} |f'(z_0)| && \text{für } n \to \infty \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad |f'_0(z_0)| = \sup_{f\in\mathcal{F}} |f'(z_0)| \qquad \text{und insbesondere} \qquad \sup_{f\in\mathcal{F}} |f'(z_0)| < \infty.$$

(iii) Für ein Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $\mathbb{R}$ ist die *Cauchy-Transformierte*

$$G_\mu : \mathbb{C}^+ \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad z \longmapsto \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-t}\, d\mu(t)$$

holomorph auf $\mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$ und es gilt

$$|G_\mu(z)| \leq \frac{1}{\operatorname{Im}(z)} =: \omega(z) \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}^+.$$

Damit ist die Menge

$$\mathscr{G} := \{G_\mu \mid \mu \text{ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf } \mathbb{R}\} \subset \mathcal{O}(\mathbb{C}^+)$$

nach (i) relativkompakt in $\mathcal{O}(\mathbb{C}^+)$.

12. Konstruktion holomorpher Funktionen

In diesem Kapitel widmen wir uns den folgenden beiden Problemstellungen:

Problem I: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $A \subset \Omega$ diskret in Ω und

$$m : A \longrightarrow \mathbb{N} \quad , \quad a \longmapsto m_a$$

eine Funktion. Gibt es eine Funktion $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, sodass

- $A = \mathcal{N}(f)$ und
- $m_a = \operatorname{ord}(f; a)$ für alle $a \in A$?

Problem II: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $A \subset \Omega$ diskret in Ω und

$$\begin{aligned} h : A &\longrightarrow \mathcal{O}_0(\mathbb{C}) := \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) \mid f(0) = 0\}, \\ a &\longmapsto h_a \end{aligned}$$

eine Funktion. Gibt es ein $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus A)$, sodass

$$H_a(z) := h_a\left(\frac{1}{z-a}\right), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$$

für jedes $a \in A$ den Hauptteil der Laurententwicklung von f um den Punkt a darstellt?

Zusatz: Falls es solche Funktionen gibt, wie lassen sich diese explizit konstruieren?

Dies ist in der Tat immer möglich. Wir konzentrieren uns hier auf den Fall $\Omega = \mathbb{C}$.

I. Der Produktsatz von Weierstraß

Falls A endlich ist, etwa $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, dann ist

$$f(z) := \prod_{j=1}^{n} (z - a_j)^{m_{a_j}}$$

eine Lösung von Problem I. Ist A hingegen nicht endlich, so benötigen wir unendliche Produkte. Man beachte hierbei, dass A als diskrete Menge in $\mathbb{C}$ in jedem Fall abzählbar ist; das Konvergenzverhalten unendlicher Produkte ist jedoch nicht ganz einfach.

Definition 12.1: Sei $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge aus $\mathbb{C}$. Wir sagen

„das *unendliche Produkt* $\prod_{n=1}^{\infty} b_n$ ist konvergent (gegen P)“,

falls der Grenzwert

$$P := \lim_{N\to\infty} P_N$$

existiert, wobei P_N das *N-te Partialprodukt* von $\prod_{n=1}^{\infty} b_n$ bezeichnet, d. h.

$$P_N := \prod_{n=1}^{N} b_n.$$

In diesem Fall schreiben wir

$$P = \prod_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Bemerkung 12.2: Ist $\prod_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent gegen ein $P \neq 0$, dann gilt

$$b_n \to 1 \qquad \text{für } n \to \infty,$$

denn wegen

$$\lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{\infty} b_n = P \neq 0$$

ist $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit auch

$$P_N = \prod_{n=1}^{N} b_n \neq 0 \qquad \text{für alle } N \in \mathbb{N},$$

sodass

$$b_N = \frac{P_N}{P_{N-1}} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \frac{P}{P} = 1.$$

Wir betrachten daher meist Produkte der Form

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1+a_n), \qquad \text{d. h.} \quad b_n = 1 + a_n$$

mit einer Nullfolge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ aus $\mathbb{C}$.

Damit $\prod_{i=1}^{\infty}(1+a_n)$ einen Grenzwert $P \neq 0$ hat, reicht die Forderung $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ jedoch nicht aus. Beispielweise gilt:

- $P_N = \prod_{n=1}^{N}(1+\frac{1}{n}) = \prod_{i=1}^{N} \frac{n+1}{n} = N+1 \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \infty$
- $P_N = \prod_{n=1}^{N}(1-\frac{1}{n+1}) = \prod_{i=1}^{N} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{N+1} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Wir haben jedoch:

Satz 12.3: *Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, dann ist $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ konvergent und es gilt $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) \neq 0$ genau dann, wenn $a_n \neq -1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis: Wir setzen

$$P_N := \prod_{n=1}^{N}(1+a_n) \qquad \text{und} \qquad \tilde{P}_N := \prod_{n=1}^{N}(1+|a_n|).$$

Behauptung: Mit unseren Festsetzungen gelten die folgenden Aussagen:

① Für alle $N \in \mathbb{N}$ ist $\tilde{P}_N \leq \exp(\sum_{n=1}^{N}|a_n|)$.

② Für alle $N \in \mathbb{N}$ ist $|P_N - 1| \leq \tilde{P}_N - 1$, d. h. $|P_N| \leq \tilde{P}_N$.

③ Für $M, N \in \mathbb{N}$ mit $M > N$ gilt

$$|P_M - P_N| \leq \exp\Big(\sum_{n=1}^{N}|a_n|\Big)\Big[\exp\Big(\sum_{n=N+1}^{M}|a_n|\Big) - 1\Big].$$

Zu ①: Für $x \geq 0$ gilt $1 + x \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x)$. Damit erhalten wir

$$\tilde{P}_N = \prod_{n=1}^{N}(1+|a_n|) \leq \prod_{n=1}^{N}\exp(|a_n|) = \exp\Big(\sum_{n=1}^{N}|a_n|\Big).$$

Zu ②: Wir führen den Beweis per Induktion nach N. Der Induktionsanfang $N = 1$ ist dabei trivial.

Induktionsschritt $N \to N+1$: Aus

$$\begin{aligned} P_{N+1} - 1 &= P_N(1 + a_{N+1}) - 1 \\ &= (P_N - 1)(1 + a_{N+1}) + a_{N+1} \end{aligned}$$

folgt nach Übergang zum Betrag mit der Dreiecksungleichung

$$|P_{N+1} - 1| \leq |P_N - 1|(1 + |a_{N+1}|) + |a_{N+1}|$$

und daraus unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung $|P_N - 1| \leq \tilde{P}_N - 1$, dass

$$\begin{aligned} |P_{N+1} - 1| &\leq (\tilde{P}_N - 1)(1 + |a_{N+1}|) + |a_{N+1}| \\ &= \tilde{P}_N(1 + |a_{N+1}|) - 1 \\ &= \tilde{P}_{N+1} - 1. \end{aligned}$$

Zu ③: Es gilt

$$P_M - P_N = P_N \prod_{n=N+1}^{M}(1+a_N) - P_N = P_N\Big[\prod_{n=N+1}^{M}(1+a_N) - 1\Big],$$

wobei

$$|P_N| \overset{②}{\leq} \tilde{P}_N \overset{①}{\leq} \exp\Big(\sum_{n=1}^{N}|a_n|\Big)$$

und

$$\Big|\prod_{n=N+1}^{M}(1+a_n)-1\Big| \overset{②}{\leq} \prod_{n=N+1}^{M}(1+|a_n|)-1 \overset{①}{\leq} \exp\Big(\sum_{n=N+1}^{M}|a_n|\Big)-1.$$

Zusammenfassend erhalten wir damit wie gewünscht

$$\begin{aligned}|P_M-P_N| &\leq |P_N|\Big|\prod_{n=N+1}^{M}(1+a_N)-1\Big| \\ &\leq \exp\Big(\sum_{n=1}^{N}|a_n|\Big)\Big[\exp\Big(\sum_{n=N+1}^{M}|a_n|\Big)-1\Big].\end{aligned}$$

Sei nun $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, d. h.

$$S := \sum_{n=1}^{\infty}|a_n| < \infty.$$

Zu $\varepsilon > 0$ finden wir dann ein $\delta > 0$ mit

$$e^S(e^\delta - 1) < \varepsilon$$

sowie ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{n=N_0+1}^{\infty}|a_n| < \delta.$$

Damit folgt aus ③ für $M > N \geq N_0$, dass $|P_M - P_N| < \varepsilon$. Somit ist $(P_N)_{N=1}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge, also konvergent gegen ein $P \in \mathbb{C}$, d. h.

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) = P.$$

Insbesondere gilt dann (mit der Rechnung zu ③) für alle $M, N \in \mathbb{N}$ mit $M > N$

$$|P_M - P_N| \leq |P_N|\Big[\exp\Big(\sum_{n=N+1}^{M}|a_n|\Big)-1\Big],$$

woraus sich für $M \to \infty$ wegen $P_M \to P$

$$|P - P_N| \leq |P_N|\Big[\exp\Big(\sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n|\Big)-1\Big]$$

für beliebiges $N \in \mathbb{N}$ ergibt. Indem wir nun N hinreichend groß wählen, können wir

$$\exp\Big(\sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n|\Big)-1 < \frac{1}{2}$$

erreichen. Damit gilt

$$|P - P_N| \leq \frac{1}{2}|P_N|$$

und

$$|P| \geq |P_N| - |P - P_N| \geq \frac{1}{2}|P_N|,$$

womit sich auch die behauptete Äquivalenz

$$\begin{aligned} P = 0 \quad &\iff \quad P_N = 0 \\ &\iff \quad \exists\, n \in \mathbb{N}, n \leq N : \quad a_n = -1 \end{aligned}$$

ergibt. ∎

Korollar 12.4: *Ist $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in $[0,1)$, dann gilt:*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 - a_n) \in (0, \infty) \quad \iff \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty.$$

Beweis: Als Übung. ∎

Definition 12.5: Sei $\varnothing \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in $\mathscr{C}(\Omega)$. Wir nennen $\prod_{n=1}^{\infty} g_n$ *punktweise (bzw. kompakt) konvergent auf* Ω, falls die Folge $(P_N)_{N=1}^{\infty}$ der Partialprodukte

$$P_N := \prod_{i=1}^{N} g_n \in \mathscr{C}(\Omega)$$

punktweise (bzw. kompakt) konvergent ist.

Ist $P : \Omega \to \mathbb{C}$ die (stetige) Grenzfunktion, dann schreiben wir

$$P = \prod_{n=1}^{\infty} g_n.$$

Sind alle g_n holomorph und konvergiert $\prod_{n=1}^{\infty} g_n$ kompakt auf Ω, dann ist $\prod_{n=1}^{\infty} g_n$ ebenfalls holomorph.

Satz 12.6: *Sei $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in $\mathscr{C}(\Omega)$ für eine offene Menge $\varnothing \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$, sodass die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

normal konvergent ist, dann konvergiert das unendliche Produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + f_n)$$

kompakt auf Ω gegen eine Funktion $P \in \mathscr{C}(\Omega)$ und es gilt

$$P(z) = 0 \qquad \iff \qquad \exists\, n \in \mathbb{N} : \quad f_n(z) = -1.$$

Beweis: Ist $K \subset \Omega$ kompakt, so folgt aus ③ im Beweis von Satz 12.3, dass

$$\|P_M - P_N\|_K \le \exp\left(\sum_{n=1}^{N} \|f_n\|_K\right)\left[\exp\left(\sum_{n=N+1}^{M} \|f_n\|_K\right) - 1\right]$$

für alle $M > N \ge 1$ gilt, wobei $P_N := \prod_{n=1}^{N}(1+f_n)$. Damit folgt die kompakte Konvergenz; der Zusatz ergibt sich direkt aus Satz 12.3 angewendet auf $a_n = f_n(z)$ für festes $z \in \Omega$. ■

Satz 12.7: *Ist $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in $\mathcal{O}(G) \setminus \{0\}$, für die die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1 - g_n)$$

normal konvergent ist, dann konvergiert $\prod_{n=1}^{\infty} g_n$ kompakt gegen ein $P \in \mathcal{O}(G) \setminus \{0\}$ und es gilt

$$\operatorname{ord}(P; z) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{ord}(g_n; z) \qquad \forall\, z \in G.$$

Beweis: Sei $z \in G$. Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(1-g_n)$ nach Voraussetzung kompakt konvergiert, haben wir insbesondere (für $K = \{z\}$)

$$\sum_{n=1}^{\infty}|1 - g_n(z)| < \infty,$$

sodass

$$\lim_{n\to\infty} |1 - g_n(z)| = 0$$

gelten muss. Deshalb finden wir ein $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass

$$|1 - g_n(z)| < \frac{1}{2} \qquad \forall\, n \ge N.$$

Somit ist $g_n(z) \neq 0$ für alle $n \ge N$. Wir erhalten somit eine Zerlegung

$$P = \left(\prod_{n=1}^{N-1} g_n\right) \cdot \left(\prod_{n=N}^{\infty} g_n\right) = \left(\prod_{n=1}^{N-1} g_n\right) \cdot H,$$

wobei die durch

$$H := \prod_{n=N}^{\infty} g_n$$

definierte Funktion $H \in \mathcal{O}(\Omega)$ an der Stelle z keine Nullstelle haben kann; man beachte hierfür, dass mit $\sum_{n=1}^{\infty}(1-g_n)$ natürlich auch $\sum_{n=N}^{\infty}(1-g_n)$ kompakt konvergent ist, sodass hier Satz 12.6 angewendet werden kann.

Die Funktion P hat also in z eine Nullstelle endlicher Ordnung. Genauer gilt

$$\operatorname{ord}(P; z) = \sum_{n=1}^{N-1} \operatorname{ord}(g_n; z)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{ord}(g_n; z) \qquad\qquad (\text{da } \forall\, n \geq N : \operatorname{ord}(g_n; z) = 0) \qquad \blacksquare$$

Definition 12.8: Die ganzen Funktionen E_p mit $p \in \mathbb{N}_0$, die gegeben sind durch

$$E_0 := (1 - z) \qquad \text{und} \qquad E_p(z) := (1 - z) \exp\Big(\sum_{j=1}^{p} \frac{z^j}{j}\Big) \quad \text{für } p \geq 1$$

heißen *Elementarfaktoren.*

Lemma 12.9: *Für alle $p \in \mathbb{N}_0$ und alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ gilt*

$$|1 - E_p(z)| \leq |z|^{p+1}.$$

Beweis: Im Fall $p = 0$ ist die Behauptung trivial. Sei also nun $p \geq 1$ gegeben. Wir berechnen zunächst

$$\begin{aligned}
E_p'(z) &= -\exp\Big(\sum_{j=1}^{p} \frac{z^j}{j}\Big) + \underbrace{(1 - z)\Big(\sum_{j=1}^{p} z^{j-1}\Big)}_{=1-z^p} \exp\Big(\sum_{j=1}^{p} \frac{z^j}{j}\Big) \\
&= -z^p \exp\Big(\sum_{j=1}^{p} \frac{z^j}{j}\Big) \\
&= -z^p \prod_{j=1}^{p} \exp\Big(\frac{z^j}{j}\Big).
\end{aligned}$$

Damit sehen wir, dass die Potenzreihenentwicklung der Funktion $-E_p'$ um 0 die Form

$$-E_p'(z) = \sum_{n=p}^{\infty} a_n z^n$$

hat, wobei die Koeffizienten die Bedingung $a_n \geq 0$ für alle $n \geq p$ erfüllen; dies sieht man, indem man die Potenzreihenentwicklung von exp verwendet und damit die Koeffizienten a_n aus der obigen Produktdarstellung von $-E_p'$ bestimmt. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
1 - E_p(z) &= E_p(0) - E_p(z) \\
&= \int_{\gamma_{0\to z}} (-E_p'(\zeta))\, d\zeta \\
&= \sum_{n=p}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}
\end{aligned}$$

und nach Übergang zum Betrag

$$|1 - E_p(z)| \leq \Big(\sum_{n=p}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \underbrace{|z|^{n-p}}_{\leq 1}\Big) |z|^{p+1}$$

$$\leq \underbrace{\left(\sum_{n=p}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} 1^{n+1}\right)}_{=1-E_p(1)=1} |z|^{p+1}. \qquad \blacksquare$$

Satz 12.10: *Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $|a_n| \to \infty$ für $n \to \infty$. Weiter sei $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{N}_0$, sodass gilt*

$$\forall\, r > 0 : \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{1+p_n} < \infty \tag{12.1}$$

(etwa $p_n = n-1$), dann ist

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

auf $\mathbb{C}$ kompakt konvergent gegen eine ganze Funktion P, die Nullstellen genau in $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ hat, wobei genauer gilt:

$$\operatorname{ord}(P; a) = \#\{n \in \mathbb{N} \mid a_n = a\} \qquad \forall\, a \in A.$$

Beweis: Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt. Wähle $r > 0$ mit $K \subset D(0, r)$ sowie $N \in \mathbb{N}$, sodass gilt

$$\frac{r}{|a_n|} < 1 \qquad \text{für alle } n \geq N.$$

Mit Lemma 12.9 erhalten wir daher

$$\left|1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)\right| \leq \left|\frac{z}{a_n}\right|^{1+p_n} \qquad \forall\, n \geq N, z \in K$$

und somit

$$\max_{z \in K} \left|1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)\right| \leq \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{1+p_n} \qquad \forall\, n \geq N$$

Wegen Gl. (12.1) liefert uns das Majorantenkriterium, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \max_{z \in K} \left|1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)\right| < \infty.$$

Mit Satz 12.7 folgt nun die Behauptung. $\blacksquare$

Satz 12.11 (Lösung zu Problem I für $\Omega = \mathbb{C}$): *Sei $A \subset \Omega$ diskret in Ω und $m : A \to \mathbb{N}$ eine Funktion.*

① A endlich: *Das holomorphe Polynom*

$$f(z) = \prod_{a \in A} (z - a)^{m_a}$$

leistet in diesem Fall das Gewünschte.

② A nicht endlich, $0 \notin A$: *Wähle eine Abzählung $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ von A mit Vielfachheiten m, d. h.*

$$A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \textit{und} \quad \#\{n \in \mathbb{N} \mid a_n = a\} = m_a \quad \textit{für alle } a \in A,$$

sodass zusätzlich $|a_n| \to \infty$ für $n \to \infty$ gilt. Verwende dann Satz 12.10, um $f = P$ zu finden.

③ A nicht endlich, $0 \in A$: *Betrachte $\tilde{A} := A \setminus \{0\}$, $\tilde{m} := m|_A$ und finde $\tilde{f}$ zu $\tilde{A}, \tilde{m}$ mit ②. Dann setze*

$$f(z) := z^{m_0} \tilde{f}(z).$$

Satz 12.12 (Produktsatz von Weierstraß, Weierstraß, 1876): *Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Sind $a_1, a_2, \dots$ die Nullstellen von f in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, aufgelistet gemäß ihrer Vielfachheit, sodass zusätzlich $|a_1| \leq |a_2| \leq \dots$ erfüllt ist, dann gibt es Zahlen $p_1, p_2, \dots$ in $\mathbb{N}_0$ sowie eine ganze Funktion $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, sodass gilt:*

$$f(z) = e^{g(z)} z^{\operatorname{ord}(f;0)} \prod_n E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right) \tag{12.2}$$

Beweis: Mit Satz Satz 12.11 konstruieren wir durch

$$P(z) = \prod_n E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

eine Funktion $P \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ zu den Nullstellen $a_1, a_2, \dots$ von f.

$\implies$ Die Funktion

$$h\colon \mathbb{C} \setminus \{0, a_1, a_2, \dots\} \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad z \longmapsto \frac{f(z)}{z^{\operatorname{ord}(f;0)} P(z)}$$

hat nur hebbare Singularitäten und lässt sich zu einer ganzen Funktion $\tilde{h}$ ohne Nullstellen fortsetzen.

$\implies$ Nach Aufgabe 1 (b) von Blatt 5 existiert eine Funktion $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ mit

$$\tilde{h}(z) = e^{g(z)} \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

$\implies$ Es gilt damit

$$f(z) = \tilde{h}(z) z^{\operatorname{ord}(f;0)} P(z) = e^{g(z)} z^{\operatorname{ord}(f;0)} \prod_n E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right).$$

Dies beweist die in Gl. (12.2) behauptete Produktdarstellung für f. ■

II. Der Satz von Mittag-Leffler

Ist A endlich, sagen wir $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, dann ist

$$f(z) := \sum_{j=1}^{n} h_{a_j}\left(\frac{1}{z-a_j}\right), \quad z \in \mathbb{C} \setminus A$$

offensichtlich eine Lösung von Problem II im Fall $\Omega = \mathbb{C}$. Für nicht endliches A fügen wir *konvergenzerzeugende Summanden* ein:

Wir wählen eine Abzählung $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ von A, sodass

$$|a_0| \leq |a_1| \leq |a_2| \leq \dots$$

gilt; insbesondere haben wir dann $|a_n| \to \infty$ für $n \to \infty$. Wir setzen

$$r_n := \frac{1}{2}|a_n| > 0 \qquad \text{und} \qquad D_n := D(0, r_n) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

$\Longrightarrow$ H_{a_n} ist auf $D(0, 2r_n) \supseteq \overline{D}_n$ holomorph, lässt sich also gleichmäßig auf $\overline{D}_n$ durch Taylorpolynome approximieren, d. h., für alle $\varepsilon_n > 0$ existiert ein holomorphes Polynom P_n, sodass

$$\|H_{a_n} - P_n\|_{\overline{D}_n} < \varepsilon_n.$$

Wir wählen $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$, sodass $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$; seien $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ die zugehörigen Polynome.

Behauptung: Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (H_{a_n} - P_n)$$

konvergiert normal auf $\mathbb{C} \setminus \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Ist $K \subset \mathbb{C} \setminus A$ kompakt, dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $K \subset D_n$ für alle $n \geq N$ erfüllt ist. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{n=N}^{\infty} \|H_{a_n} - P_n\|_K &\leq \sum_{n=N}^{\infty} \|H_{a_n} - P_n\|_{\overline{D}_n} \\ &< \sum_{n=N}^{\infty} \varepsilon_n < \infty. \end{aligned}$$

Wir sehen also: Durch

$$f(z) := h_{a_0}\left(\frac{1}{z-a_0}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(h_{a_n}\left(\frac{1}{z-a_n}\right) - p_n(z)\right)$$

wird eine Funktion $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus A)$ definiert.

Behauptung: f hat in $a \in A$ den Hauptteil H_a.

Wähle $r > 0$ mit $D^\bullet(a,r) \subseteq \mathbb{C} \setminus A$. Wegen $|a_n| \to \infty$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$D^\bullet(a,r) \subseteq D_n \qquad \forall\, n \geq N$$

$$\Longrightarrow f = H_{a_0} + \underbrace{\sum_{n=1}^{N-1}(H_{a_n} - P_n)}_{\text{hat im Punkt } a, \text{ weil } a \in \{a_0,\dots,a_{N-1}\}, \text{ den Hauptteil } H_a} + \underbrace{\sum_{n=N}^{\infty}(H_{a_n} - P_n)}_{\text{kompakt konvergent auf } D(a,r), \text{ dort also holomorph}}$$

$\Longrightarrow f = H_a + g_a$ mit einer Funktion $g_a \in \mathcal{O}(D(a,r))$.

Damit haben wir bewiesen:

Satz 12.13 (Satz von Mittag-Leffler, M. G. Mittag-Leffler, 1877): *Auf $\Omega = \mathbb{C}$ besitzt Problem II stets eine Lösung.*

Bemerkung 12.14:

(i) Für allgemeines Ω reichen holomorphe Polynome zur Approximation der Hauptteile nicht immer aus; man kann jedoch immer rationale Funktionen mit Polen $\mathbb{C} \setminus \Omega$ wählen (Satz von Runge).

(ii) Man kann Lösungen zu Problem I auch aus Lösungen zu Problem II konstruieren:
Ist $A \subset \mathbb{C}$ diskret in Ω und ist $m : A \to \mathbb{N}$ eine Funktion, dann sei

$$h : A \longrightarrow \mathcal{O}_0(\mathbb{C}) \quad , \quad a \longmapsto h_a$$

definiert durch $h_a(z) := m_a z$. Dann gilt:

f ist eine Lösung zu Problem I mit (A, m)
$\Longleftrightarrow$ $\frac{f'}{f}$ ist eine Lösung zu Problem II mit (A, h).

III. Anwendungen

Lemma 12.15 (Logarithmische Ableitung): *Sei $\varnothing \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $(g_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge nullstellenfreier Funktionen aus $\mathcal{O}(\Omega)$, für die*

$$\prod_{n=1}^{\infty} g_n$$

kompakt konvergent ist gegen $g \in \mathcal{O}(\Omega)$. Dann gilt

$$\frac{g'}{g} := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n'}{g_n}$$

mit kompakter Konvergenz auf Ω.

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus Aufgabe 5(a), Blatt 10, denn danach gilt

$$\frac{P_N'}{P_N} = \sum_{n=1}^{N} \frac{g_n'}{g_n} \qquad \text{für} \qquad P_N := \prod_{i=1}^{N} g_n.$$

■

Beispiel 12.16: Nach Satz 12.10 ist

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_1\left(\frac{z}{a_n}\right) \qquad \text{mit} \qquad a_n := \begin{cases} m, & \text{falls } n = 2m-1 \\ -m, & \text{falls } n = 2m \end{cases}$$

eine ganze Funktion mit Nullstellen erster Ordnung in $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$; man beachte, dass $p_n = 1$ hier tatsächlich ausreicht, denn wir haben

$$\forall\, r > 0: \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^2 = 2r^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} < \infty.$$

Da auch 0 eine Nullstelle erster Ordnung von sin ist, besagt Satz 12.12, dass es eine Funktion $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ gibt, sodass

$$\sin(\pi z) = e^{g(z)} z P(z) = e^{g(z)} z \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{m^2}\right) \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Man beachte hierbei, dass

$$\begin{aligned} P(z) &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \exp\left(\frac{z}{a_n}\right) \\ &= \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{m}\right) \exp\left(\frac{z}{m}\right) \left(1 + \frac{z}{m}\right) \exp\left(-\frac{z}{m}\right) \\ &= \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{m^2}\right). \end{aligned}$$

Lemma 12.15 liefert dann

$$\pi \cot(\pi z) = \pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = g'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - m^2}$$

$$= g'(z) + \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{z-n}.$$

Insbesondere sehen wir damit, dass g' periodisch ist mit Periode 1. Ferner überlegt man sich, dass g' auf dem Vertikalstreifen $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \le \mathrm{Re}(z) \le 1\}$ beschränkt ist. Nach dem Satz von Liouville (Satz 3.2) ist g' somit konstant. Man überlegt sich nun, dass

$$\lim_{T\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{T}{T^2+m^2} = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}$$

gilt, woraus sich mit $\lim_{T\to\infty} \pi\cot(\pi \mathrm{i} T) = -\pi\mathrm{i}$ schließlich

$$\lim_{T\to\infty} g'(\mathrm{i}T) = \lim_{T\to\infty} \left(\pi\cot(\pi\mathrm{i}T) - \frac{1}{\mathrm{i}T} + 2\mathrm{i}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{T}{T^2+m^2}\right) = 0$$

ergibt. Dies zeigt, dass $g' \equiv 0$ gelten muss. Wir haben also $e^g \equiv c$ für ein $c \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Um den Wert von c zu bestimmen, nutzen wir die obige Produktdarstellung von sin aus und berechnen, dass

$$\pi = \lim_{z\to 0} \frac{\sin(\pi z)}{z} = \lim_{z\to 0} c \prod_{m=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{m^2}\right) = c.$$

Also:

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{i=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{m^2}\right) \qquad \text{und}$$

$$\pi\cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-m^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n}\right) \tag{12.3}$$

Man beachte, dass für festes $r > 0$

$$\left|\frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n}\right| = \left|\frac{z}{a_n(z-a_n)}\right| \le \frac{2r}{|a_n|^2},$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \le r$ und alle $n \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| > 2r$ gilt, sodass die Reihe in Gl. (12.3) in der Tat kompakt konvergiert. Diese Bedingung für die approximierenden Polynome, die hier als $P_n(z) := -\frac{1}{a_n}$ gewählt wurden, ist zwar deutlich schwächer als die Forderung, die wir im Beweis zum Satz von Mittag-Leffler (Satz 12.13) gestellt haben, sie reicht aber dennoch aus.

Satz 12.17: *Jede Funktion $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ ist von der Form $f = \frac{g}{h}$ mit $g, h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, d. h. $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ ist der Quotientenkörper zum Integritätsbereich $\mathcal{O}(\mathbb{C})$.*

Beweis: Man konstruiere mit Satz 12.11 eine ganze Funktion h, die Nullstellen gleicher Ordnung genau in den Polstellen von f besitzt. Damit sind alle Singularitäten der Funktion $f \cdot h$ hebbar und lässt sich somit zu einer ganzen Funktion g fortsetzen. Damit haben wir $f = \frac{g}{h}$, wie gewünscht. ■

13. Holomorphe Funktionen als Abbildungen

Wir wollen holomorphe Funktionen in diesem Kapitel als Abbildungen zwischen Teilmengen von $\mathbb{C}$ untersuchen und dabei insbesondere den Einfluss des Wertebereichs verstehen.

Satz 13.1 (Lemma von Schwarz, H. A. Schwarz, 1869): *Sei* $\mathbb{D} := D(0,1)$*. Für jede Funktion* $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ *mit* $f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ *und* $f(0) = 0$ *gilt*

$$|f'(0)| \leq 1 \quad \textit{und} \quad |f(z)| \leq |z| \quad \forall\, z \in \mathbb{D}.$$

Gilt $|f'(0)| = 1$ *oder gibt es ein* $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ *mit* $|f(z)| = |z|$*, dann ist* f *eine* Drehung*, d. h. es gibt ein* $\varphi \in \mathbb{R}$*, sodass*

$$f(z) = e^{\mathrm{i}\varphi} z \quad \forall\, z \in \mathbb{D}.$$

Beweis: Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz (Satz 6.4) ist

$$g : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad z \mapsto \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & \text{für } z \neq 0 \\ f'(0) & \text{für } z = 0 \end{cases}$$

auf $\mathbb{D}$ holomorph. Nach dem Maximumprinzip (Satz 3.7) haben wir auf $G = D(0,r)$ für $0 < r < 1$

$$\forall\, z \in D(0,r) \quad : \quad |g(z)| \leq \max_{|\zeta|=r} \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta} \right| \leq \frac{1}{r}$$

und deshalb (für $r \nearrow 1$)

$$|g(z)| \leq 1 \quad \forall\, z \in \mathbb{D}$$

Nach Definition von g haben wir also $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in \mathbb{D}$ und $|f'(0)| = |g(0)| \leq 1$.
Gilt irgendwo Gleichheit, muss g nach Satz 3.7 konstant sein mit Betrag 1, d. h.

$$\begin{aligned} \exists\, \varphi \in \mathbb{R} \quad : \quad & \frac{f(z)}{z} = g(z) = e^{\mathrm{i}\varphi} \quad \forall\, z \in \mathbb{D} \setminus \{0\} \\ & \Longrightarrow f(z) = e^{\mathrm{i}\varphi} z \quad \forall\, z \in \mathbb{D} \qquad , \end{aligned}$$

sodass f wie behauptet eine Drehung sein muss. ∎

Definition 13.2:

(i) Sind $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ offen, dann nennen wir eine Abbildung $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ *biholomorph*, falls f bijektiv ist mit $f \in \mathcal{O}(\Omega_1)$ und $f^{-1} \in \mathcal{O}(\Omega_2)$. Gibt es ein solches f, dann nennen wir Ω_1 und Ω_2 *biholomorph äquivalent*.

(ii) Ist $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, dann heißt eine biholomorphe Abbildung $f : \Omega \to \Omega$ ein *Automorphismus von* Ω. Wir nennen

$$\mathrm{Aut}(\Omega) := \{f : \Omega \to \Omega \mid f \text{ Automorphismus}\}$$

die *Automorphismengruppe von* Ω.

$\mathrm{Aut}(\Omega)$ ist tatsächlich eine Gruppe bezüglich der Komposition von Abbildungen und mit dem neutralem Element $\mathrm{id}_{\mathbb{D}}$.

Satz 13.3: *Für $a \in \mathbb{D}$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ seien ϕ_a, $d_\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ gegeben durch*

$$\phi_a(z) := \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \quad \textit{und} \quad d_\varphi(z) := e^{\mathrm{i}\varphi} z.$$

Dann gilt

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) = \{d_\varphi \circ \phi_a \mid a \in \mathbb{D}, \varphi \in \mathbb{R}\}.$$

Beweis: Die Inklusion $\supseteq$ rechnet man nach. Ist umgekehrt $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ gegeben, dann wähle $a := f^{-1}(0)$ und betrachte $g := f \circ \phi_{-a}$. Dann ist $g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ mit

$$g(0) = f\big(\phi_{-a}(0)\big) = f(a) = 0$$

und gemäß Satz 13.1 gilt $|g'(0)| \le 1$ sowie $|(g^{-1})'(0)| \le 1$. Wegen $g^{-1} \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{D}}$ liefert die Kettenregel

$$1 = (g^{-1} \circ g)'(0) = (g^{-1})'(0) g'(0),$$

sodass $|g'(0)| = 1$ und $|(g^{-1})'(0)| = 1$ folgt. Laut Satz 13.1 ist somit $g = d_\varphi$ für ein $\varphi \in \mathbb{R}$, d. h. es gilt

$$d_\varphi \circ \phi_a = g \circ \phi_a = (f \circ \phi_{-a}) \circ \phi_a = f \circ (\phi_{-a} \circ \phi_a) = f \circ \mathrm{id}_{\mathbb{D}} = f,$$

womit der Automorphismus f die gewünschte Gestalt hat. ∎

Satz 13.4 (Lemma von Schwarz-Pick): *Für $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ mit $f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ gilt*

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \le \frac{1}{1-|z|^2} \qquad \forall\, z \in \mathbb{D}.$$

Gleichheit für ein $z \in \mathbb{D}$ erzwingt $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Beweis: Satz 13.1 liefert $|g_z'(0)| \le 1$ für $g_z := \phi_{f(z)} \circ f \circ \phi_{-z}$. ∎

Satz 13.5 (von der offenen Abbildung): *Sei $\varnothing \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ sei auf keiner Zusammenhangskomponente von Ω konstant. Dann ist $f(\Omega)$ offen in $\mathbb{C}$.*

Beweis: Sei $w_0 = f(z_0) \in f(\Omega)$ für ein $z_0 \in \Omega$ und sei G_0 die Zusammenhangskomponente von Ω, die z_0 enthält. Wir wollen zeigen, dass mit w_0 noch eine ganze Kreisscheibe $D(w_0, \varepsilon)$ für ein $\varepsilon > 0$ in $f(G_0)$ und damit im Bild $f(\Omega)$ enthalten ist.

Zunächst halten wir fest, dass nach Korollar 5.5 ein $g \in \mathcal{O}(G_0)$ mit $g(z_0) \neq 0$ sowie ein $k \in \mathbb{N}$ existieren, sodass

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^k g(z) \quad \forall\, z \in G_0.$$

Wähle nun $r > 0$, sodass g auf $\overline{D(z_0, r)} \subset G_0$ keine Nullstelle hat und setze

$$\varepsilon := \min_{z \in \partial D(z_0, r)} |(z - z_0)^k g(z)| > 0.$$

Dann gilt für ein festes $w \in D(w_0, \varepsilon)$

$$\begin{aligned} \big|\big(f(z) - w\big) - \big(f(z) - w_0\big)\big| &= |w - w_0| \\ &< \varepsilon \leq |(z - z_0)^k g(z)| = |f(z) - w_0| \end{aligned}$$

für alle $z \in \partial D(z_0, r)$. Nach dem Satz von Rouché (Korollar 10.6) hat daher

$$z \longmapsto f(z) - w$$

wie die Funktion $z \mapsto f(z) - w_0$ auf $D(z_0, r)$ genau $k \geq 1$ Nullstellen, gezählt mit Vielfachheiten. Es gibt also (mindestens) ein $z \in D(z_0, r)$ mit $f(z) = w$.

Da $w \in D(w_0, \varepsilon)$ beliebig vorgegeben war, folgt also

$$D(w_0, \varepsilon) \subseteq f(D(z_0, r)) \subseteq f(G_0) \subseteq f(\Omega),$$

wie gewünscht. ■

Korollar 13.6 (Satz von der Gebietstreue): *Ist $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und ist $f \in \mathcal{O}(G)$ nicht konstant, dann ist auch $f(G)$ ein Gebiet in $\mathbb{C}$.*

Beweis: Nach Satz 13.5 ist $f(G)$ offen. Um zu zeigen, dass $f(G)$ zusammenhängend (und damit ein Gebiet) ist, genügt nach Satz 0.6 bzw. nach Satz 0.7 der Nachweis, dass $f(G)$ wegzusammenhängend ist.

Seien hierzu $w_1, w_2 \in f(G)$ gegeben. Wir wählen dann $z_1, z_2 \in G$ mit $f(z_1) = w_1$ und $f(z_2) = w_2$. Weil G zusammenhängend und deshalb nach Satz 0.7 auch wegzusammenhängend ist, existiert ein Weg $\gamma : [a, b] \to G$ mit $\gamma(a) = z_1$ und $\gamma(b) = z_2$. Setzen wir nun $\tilde{\gamma} := f \circ \gamma$, dann ist $\tilde{\gamma} : [a, b] \to f(G)$ ein Weg mit $\tilde{\gamma}(a) = f(\gamma(a)) = f(z_1) = w_1$ und $\tilde{\gamma}(b) = f(\gamma(b)) = f(z_2) = w_2$. Somit ist $f(G)$ wegzusammenhängend. ■

Korollar 13.7: *Ist $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ injektiv auf der offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, dann ist $f^{-1} \in \mathcal{O}(f(\Omega))$, d. h. $f : \Omega \to f(\Omega)$ ist biholomorph und es gilt*

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} \quad \forall\, w \in f(\Omega).$$

Beweis: Sei $w_0 = f(z_0) \in f(\Omega)$ mit $z_0 \in \Omega$ gegeben. Wir nehmen zusätzlich an, dass $f'(z_0) \neq 0$ gilt. Gemäß Lemma 1.11 gibt es dann eine in z_0 stetige Funktion $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $\varphi(z_0) = f'(z_0)$, die

$$f(z) = f(z_0) + \varphi(z)(z - z_0) \qquad \forall\, z \in \Omega$$

erfüllt. Wegen $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_\Omega$ erhalten wir daraus für $z = f^{-1}(w)$ und $z_0 = f^{-1}(w_0)$

$$w = w_0 + \varphi(f^{-1}(w))(f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0) \qquad \forall\, w \in f(\Omega).$$

Wie wir bereits aus der Analysis I wissen, ist f^{-1} als Umkehrfunktion einer stetigen Funktion ebenfalls stetig. Insbesondere ist $\varphi \circ f^{-1}$ stetig in w_0. Wegen $(\varphi \circ f^{-1})(w_0) = \varphi(z_0) = f'(z_0) \neq 0$ gibt es deshalb ein $\varepsilon > 0$, sodass $\varphi \circ f^{-1}$ auf $D(w_0, \varepsilon)$ nullstellenfrei ist. Betrachten wir nun

$$\eta : D(w_0, \varepsilon) \to \mathbb{C} \quad , \quad w \mapsto \frac{1}{\varphi(f^{-1}(w))}$$

so ist η wohldefiniert und zudem stetig in w_0 mit

$$f^{-1}(w) = f^{-1}(w_0) + \eta(w)(w - w_0) \qquad \forall\, w \in D(w_0, \varepsilon).$$

Gemäß Lemma 1.11 ist daher f^{-1} an der Stelle w_0 komplex differenzierbar mit

$$(f^{-1})'(w_0) = \eta(w_0) = \frac{1}{\varphi(f^{-1}(w_0))} = \frac{1}{\varphi(z_0)} = \frac{1}{f'(z_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(w_0))}.$$

Damit haben wir die komplexe Differenzierbarkeit von f^{-1} auf $f(\Omega) \setminus A$ mit $A := f(\mathcal{N}(f'))$ bewiesen. Den Beweis können wir nun auf zwei Arten beenden:

- Wir schließen aus dem folgenden Satz 13.8, dass f' keine Nullstellen auf Ω haben kann, d. h., dass A leer ist; man beachte hierbei, dass unser Beweis für Satz 13.8 nicht auf diesem Korollar aufbauen wird.
- Wir argumentieren direkter: Da f injektiv ist und somit auf keiner Zusammenhangskomponente von Ω konstant sein kann, darf f' auf keiner Zusammenhangskomponente identisch 0 sein, sodass $\mathcal{N}(f')$ nach Satz 5.4 diskret in Ω ist. Weil f stetig ist, sehen wir nun, dass A in jedem Fall diskret in $f(\Omega)$ ist. Da die Funktion $f^{-1} : f(\Omega) \to \Omega$ stetig ist und auf $f(\Omega) \setminus A$ holomorph ist, folgt nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz (Satz 6.4), dass f^{-1} sogar auf ganz $f(\Omega)$ holomorph ist. Aus $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_\Omega$ folgt dann mithilfe der Kettenregel, dass die Ableitung von f^{-1} nirgends verschwinden kann.

Dies schließt den Beweis ab. ■

Satz 13.8: *Für $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ und $z_0 \in \Omega$ sind äquivalent:*

(i) $f'(z_0) \neq 0$,

(ii) $\exists\, \delta > 0 : \quad f|_{D(z_0,\delta)} : D(z_0, \delta) \to \mathbb{C}$ *ist injektiv.*

Beweis:

(i) $\Rightarrow$ (ii): Wähle g wie in Lemma 7.13, dann ist

$$g(z_0, z_0) = f'(z_0) \neq 0,$$

d. h. wir können ein $\delta > 0$ finden, sodass

$$\forall\, z, w \in D(z_0, \delta) : \qquad g(z, w) \neq 0.$$

Nach Definition von g haben wir also

$$\forall\, z, w \in D(z_0, \delta): \qquad f(z) - f(w) = g(z,w)(z-w),$$

sodass $f(z) = f(w)$ für $z, w \in D(z_0, \delta)$ erzwingt, dass $z = w$ gilt. Demnach ist f auf $D(z_0, \delta)$ injektiv.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Wir nehmen an, dass $f'(z_0) = 0$. Wir zeigen, dass f auf keiner Kreisscheibe $D(z_0, \delta) \subseteq \Omega$ für ein $\delta > 0$ injektiv sein kann. Sei hierzu $\delta > 0$ beliebig vorgegeben. Wir wählen dann $r < \delta$ und $\varepsilon > 0$ wie im Beweis zu Satz 13.5. Dann ist die Menge

$$V := D(z_0, r) \cap f^{-1}(D(w_0, \varepsilon))$$

offen und wegen $z_0 \in V$ auch nicht leer. Wäre f' auf V identisch 0, so wäre f in einer offenen Umgebung von z_0 konstant, also insbesondere nicht injektiv, was den Beweis in diesem Fall abschließen würde. Andernfalls, gibt es also ein $\zeta \in V$ mit $f'(\zeta) \neq 0$. Aus dem Beweis zu Satz 13.5, wo wir wegen $f'(z_0) = 0$ nun speziell $k \geq 2$ haben, folgt, dass die Funktion

$$u_\zeta : \Omega \to \mathbb{C} \quad , \quad z \mapsto f(z) - f(\zeta)$$

auf $D(z_0, r)$, mit Vielfachheiten gezählt, genau k Nullstellen haben muss. Wegen $u_\zeta(\zeta) = 0$ kennen wir mit ζ bereits eine Nullstelle, diese kann wegen $u_\zeta'(\zeta) = f'(\zeta) \neq 0$ jedoch keine doppelte Nullstelle sein. Demnach existiert ein $\zeta' \in D(z_0, r) \subseteq D(z_0, \delta)$ mit $\zeta \neq \zeta'$, sodass $0 = u_\zeta(\zeta') = f(\zeta') - f(\zeta)$ und damit $f(\zeta) = f(\zeta')$ gilt. Somit ist f auf $D(z_0, \delta)$ nicht injektiv.

Damit ist die behauptete Äquivalenz beweisen. ∎

Wir schließen mit dem folgenden Satz, der wie kein anderer die Reichhaltigkeit der Funktionentheorie unterstreicht.

Satz 13.9 (Riemannscher Abbildungssatz): *Sei $\varnothing \neq G \subsetneq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Dann gibt es zu jedem $z_0 \in G$ genau eine biholomorphe Abbildung $f : G \to \mathbb{D}$ mit*

$$f(z_0) = 0 \qquad \textit{und} \qquad f'(z_0) > 0. \tag{13.1}$$

Dieser Satz geht auf von B. Riemann (1851) zurück, der ihn in seiner Dissertation für beschränkte Gebiete mit stückweise glattem Rand bewiesen hat. Mit dem Beweis des allgemeinen Falls sind weitere große Namen verbunden, etwa L. Fejér und F. Riesz (1922), die die gesuchte biholomorphe Abbildung als Lösung eines Extremalproblems erhalten. Der nachfolgend skizzierte Beweis von A. Ostrowski (1929) folgt ebenfalls dieser Idee, vereinfacht deren Argumente aber wesentlich.

Beweisidee *Eindeutigkeit*:

Sind f_1 und f_2 zwei biholomorphe Abbildungen von G auf $\mathbb{D}$, die beide den Normierungsbedingungen aus Gl. (13.1) genügen, dann liefert $\phi := f_1 \circ f_2^{-1}$ einen Automorphismus von $\mathbb{D}$, der $\phi(0) = 0$ und zudem

$$\phi'(0) = \frac{f_1'(z_0)}{f_2'(z_0)} > 0$$

erfüllt. Da wir das Lemma von Schwarz (Satz 13.1) sowohl auf ϕ als auch auf ϕ^{-1} anwenden können, erhalten wir

$$|\phi(z)| \leq |z| \quad \text{und} \quad |\phi^{-1}(z)| \leq |z| \qquad \forall\, z \in \mathbb{D}$$

und damit $|\phi(z)| \leq |z| = |\phi^{-1}(\phi(z))| \leq |\phi(z)|$, also

$$|\phi(z) = |z| \qquad \forall\, z \in \mathbb{D}.$$

Eine erneute Anwendung des Lemmas von Schwarz (Satz 13.1) verrät uns nun, dass ϕ eine Drehung sein muss. Wegen $\phi'(0) > 0$ ist dies jedoch nur möglich, wenn $\phi = \mathrm{id}_{\mathbb{D}}$ gilt. Dies zeigt $f_1 = f_2$.

Existenz:

Der Beweis der Existenz erfolgt in drei Schritten:

① Es existiert ein Gebiet $G^* \subseteq \mathbb{D}$ und eine biholomorphe Funktion $g_1 : G \to G^*$ mit $g_1(z_0) = 0$ und $g_1'(z_0) > 0$; hier geht entscheidend die Forderung $G \neq \mathbb{C}$ ein.

② Betrachte die Familie

$$\mathcal{F} := \{g : G^* \to \mathbb{D} \mid g \text{ holomorph, injektiv}, g(0) = 0, g'(0) > 0\}.$$

Finde wie in Beispiel 11.6 eine Funktion $g_2 \in \mathcal{F}$, sodass

$$g_2'(0) = \sup_{g \in \mathcal{F}} g'(0)$$

Man verwendet hierbei die Tatsache (Satz von Hurwitz), dass die Grenzfunktion einer kompakt konvergenten Folge injektiver Funktionen auf einem Gebiet entweder konstant oder selber wieder injektiv ist.

③ Zeige, dass $g_2(G^*) = \mathbb{D}$.

$\Longrightarrow$ $f = g_2 \circ g_1$ leistet das Gewünschte.