UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG MATHEMATIK
Dr. Tobias Mai
M.Sc. Felix Leid

Klausur zur Vorlesung Funktionentheorie
Sommersemester 2017

Montag, 25.9.2017, 10:00 – 13:00 Uhr

Willkommen zur Klausur der Vorlesung Funktionentheorie

- Die Klausur beginnt um 10:00 Uhr (*st*) und endet um 13:00 Uhr (*st*).
- Bitte tragen Sie Ihre persönlichen Daten auf diesem Blatt ein und **unterschreiben Sie** dieses.
- Für diese Klausur sind keine Hilfsmittel zugelassen.
- Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis zur Kontrolle auf den Tisch.
- Schreiben Sie bitte Ihre Lösungen auf die ausgegebenen Aufgabenblätter. Sollte Ihnen der Platz nicht reichen, benutzen Sie bitte die Rückseiten der Blätter und machen Sie kenntlich, um welche Aufgaben es sich jeweils handelt.
- Beschriften Sie bitte auch alle Schmierblätter mit Ihrem Namen und geben Sie diese mit ab.
- Bitte schreiben Sie weder in rot noch mit Bleistift.

Viel Erfolg!

Nachname: Vorname:

Geburtsdatum: Matrikelnummer:

Semesterzahl: Fachrichtung:

Unterschrift:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Zus.*	Summe
Punkte										

Aufgabe 1 (2+2+2+2+2=10 Punkte)**.** Im Folgenden werden einige Grundbegriffe der Vorlesung abgefragt.

(a) Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Wann nennen wir eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph?

(b) Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Was verstehen wir unter einer meromorphen Funktion auf Ω?

(c) Geben Sie jeweils ein Beispiel an für ...

... eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

... eine **nicht** holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

... eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$, die jedoch nicht zu $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ gehört.

(d) Sei $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge stetiger Funktionen auf einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Wann nennen wir $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge bezüglich kompakter Konvergenz auf Ω?

(e) Sei γ ein geschlossener, stückweise glatter Weg. Definieren Sie die Spur γ^* von γ sowie die Umlaufzahl von γ bezüglich eines beliebigen Punktes $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

Aufgabe 2 (2+2+2+2+2=10 Punkte)**.** Formulieren Sie die folgenden Sätze der Vorlesung. Geben Sie dabei *alle* Voraussetzungen sowie die vollständige Aussage des Satzes an.

(a) Formulieren Sie die lokale Form des Maximumprinzips.

(b) Formulieren Sie den Satz von Liouville.

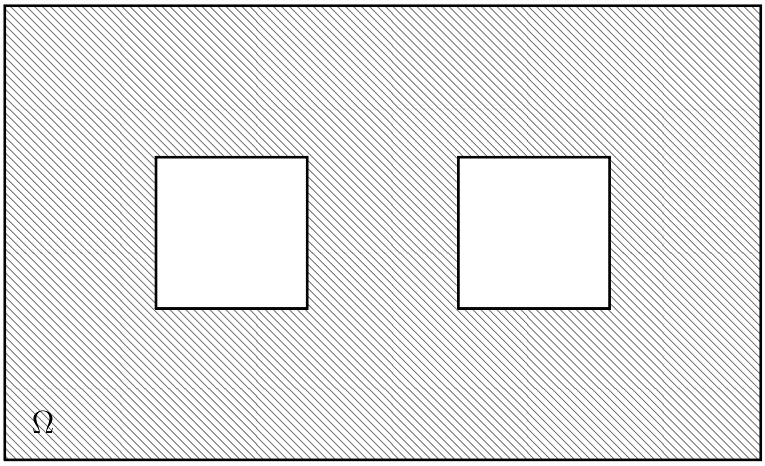
(c) Was besagt der Riemannsche Hebbarkeitssatz?

(d) Formulieren Sie den Residuensatz.

(e) Formulieren Sie den Riemannschen Abbildungssatz.

Aufgabe 3 (3+3+4=10 Punkte)**.**

(a) In der nachfolgenden Grafik ist eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ dargestellt.



(i) Ergänzen Sie in der obigen Zeichnung **drei verschiedene** geschlossene, (stückweise) glatte Wege γ_1, γ_2 und γ_3 in Ω, die den folgenden Forderungen genügen:

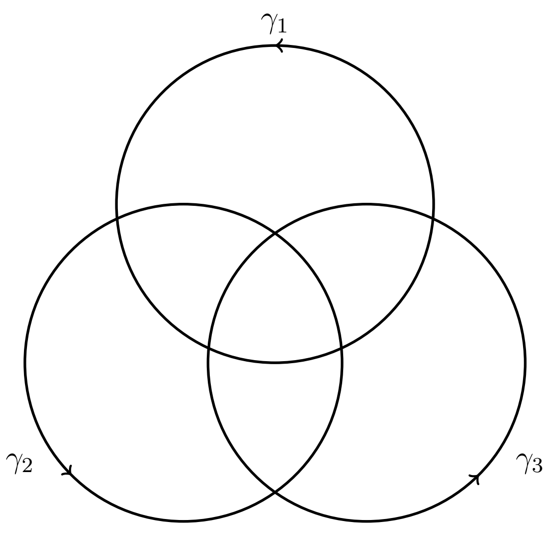
- γ_1 und γ_2 sind Ω-homotop.
- γ_2 und γ_3 sind **nicht** Ω-homotop.
- Keiner der Wege γ_1, γ_2 und γ_3 ist nullhomotop in Ω.

(ii) Setzen Sie aus Ihren Wegen γ_1, γ_2 und γ_3 einen Zyklus Γ zusammen, sodass

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \qquad \text{für } \textbf{alle } f \in \mathcal{O}(\Omega)$$

gilt. (Beachten Sie, dass in Γ mindestens einer, aber nicht notwendigerweise jeder der drei Wege γ_1, γ_2 und γ_3 vorkommen muss.)

(b) Bestimmen Sie den Wert von Ind_Γ auf jeder Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ für den nachfolgend dargestellten Zyklus $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$.



Aufgabe 4 (5+5=10 Punkte)**.** Begründen Sie im Folgenden jeden Ihrer Rechenschritte!

(a) Gegeben sei die Funktion

$$f:\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto (z + \overline{z}) \exp\Big(-\frac{1}{2}\overline{z}\Big).$$

Berechnen Sie die Pompeiu-Wirtinger Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial z}$ und $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$ und bestimmen Sie alle Punkte aus $\mathbb{C}$, in denen f komplex differenzierbar ist.
Gibt es eine offene Menge $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$, sodass die Restriktion $f|_{\Omega} : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Wir betrachten die holomorphe Funktion

$$f:\ \mathbb{C}\setminus\{0,1\}\to\mathbb{C},\quad z\mapsto\frac{1}{z(1-z)^2}.$$

Berechnen Sie die Laurententwicklung von f auf den beiden Ringgebieten

$$R_1=\{z\in\mathbb{C}\mid 0<|z|<1\}\qquad\text{und}\qquad R_2=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|>1\}.$$

Bestimmen Sie damit das Residuum $\operatorname{Res}(f;0)$.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die Potenzreihenentwicklung der holomorphen Funktion $z\mapsto\frac{1}{(1-z)^2}$ auf der Kreisscheibe $D(0,1)$.

Aufgabe 5 (5+5=10 Punkte)**.** Begründen Sie im Folgenden jeden Ihrer Rechenschritte!

(a) Berechnen Sie den Wert des uneigentlichen Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(x)}{(1+x^2)^2} \, \mathrm{d}x.$$

(b) Wir betrachten den geschlossenen, glatten Weg $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{C}$, der gegeben ist durch $\gamma(t) = e^{2it}$ für alle $t \in [0, \pi]$. Zeigen Sie, dass

$$\int_0^\pi \frac{1}{1 + \cos^2(t)} \,\mathrm{d}t = \frac{2}{i} \int_\gamma \frac{1}{z^2 + 6z + 1} \,\mathrm{d}z,$$

und berechnen Sie damit den Wert des Integrals

$$\int_0^\pi \frac{1}{1 + \cos^2(t)} \,\mathrm{d}t.$$

Aufgabe 6 (5+5=10 Punkte)**.** Begründen Sie im Folgenden jeden Ihrer Rechenschritte!

(a) Entscheiden Sie, ob es eine holomorphe Funktion $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ gibt, sodass

$$f\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{n} \qquad \text{und} \qquad f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{n+1} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(b) Konstruieren Sie eine ganze Funktion f mit der Nullstellenmenge

$$A = \{\sqrt[3]{n} \mid n \in \mathbb{N}\},$$

die in jedem Punkt aus A eine Nullstelle erster Ordnung besitzt.

Aufgabe 7 (5+5=10 Punkte)**.** Begründen Sie im Folgenden jeden Ihrer Beweisschritte!

(a) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen mit $\overline{D(0,1)} \subset \Omega$. Beweisen Sie mithilfe des Satzes von Rouché: Ist $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit der Eigenschaft

$$f(\partial D(0,1)) \subset D(0,1),$$

dann besitzt f auf $D(0,1)$ genau einen *Fixpunkt*, d.h., es gibt genau eine Lösung $z \in D(0,1)$ der Gleichung $f(z) = z$.

(b) Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet. Weiter seien $f, g : \overline{G} \to \mathbb{C}$ nullstellenfreie, stetige Funktionen mit holomorphen Restriktionen $f|_G$ und $g|_G$, die die Bedingung

$$|f(z)| = |g(z)| \qquad \text{für alle } z \in \partial G$$

erfüllen. Beweisen Sie, dass es dann ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$ geben muss, sodass gilt

$$f(z) = \lambda g(z) \qquad \text{für alle } z \in \overline{G}.$$

Aufgabe 8 (5+5=10 Punkte)**.** Begründen Sie im Folgenden jeden Ihrer Beweisschritte!

(a) Sei $f : D(0,1) \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph und nullstellenfrei. Zeigen Sie: Besitzt $\frac{f'}{f}$ an der Stelle 0 eine hebbare Singularität, dann hat auch f in 0 eine hebbare Singularität und es gilt $\lim_{z\to 0} f(z) \neq 0$.

(b) Wir bezeichnen mit $\mathcal{S}$ die Familie aller holomorphen Funktionen $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ mit der Eigenschaft $\varphi(0) = 0$. Es sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{D})$ eine beliebige normale Familie. Zeigen Sie, dass dann

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{S} := \{f \circ \varphi \mid f \in \mathcal{F},\ \varphi \in \mathcal{S}\} \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{D})$$

ebenfalls eine normale Familie ist.

Zusatzaufgabe* (10 Punkte)**.** Begründen Sie im Folgenden jeden Ihrer Beweisschritte!

Sei $\emptyset \neq G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und seien holomorphe Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_n : G \to \mathbb{C}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Wir betrachten die Abbildung

$$F: \; G \to \mathbb{C}^n, \quad z \mapsto \big(f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)\big).$$

Weiter sei V ein beliebiger $\mathbb{C}$-Untervektorraum von $\mathbb{C}^n$. Zeigen Sie: Hat das Urbild $F^{-1}(V)$ von V unter der Abbildung F einen Häufungspunkt in G, dann gilt bereits $F(G) \subseteq V$.