UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG MATHEMATIK
Dr. Tobias Mai
M.Sc. Felix Leid

Klausur zur Vorlesung Funktionentheorie
Sommersemester 2017

Dienstag, 8.8.2017, 10:00 – 13:00 Uhr

Willkommen zur Klausur der Vorlesung Funktionentheorie

- Die Klausur beginnt um 10:00 Uhr (*st*) und endet um 13:00 Uhr (*st*).
- Bitte tragen Sie Ihre persönlichen Daten auf diesem Blatt ein und **unterschreiben Sie** dieses.
- Für diese Klausur sind keine Hilfsmittel zugelassen.
- Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis zur Kontrolle auf den Tisch.
- Schreiben Sie bitte Ihre Lösungen auf die ausgegebenen Aufgabenblätter. Sollte Ihnen der Platz nicht reichen, benutzen Sie bitte die Rückseiten der Blätter und machen Sie kenntlich, um welche Aufgaben es sich jeweils handelt.
- Beschriften Sie bitte auch alle Schmierblätter mit Ihrem Namen und geben Sie diese mit ab.
- Bitte schreiben Sie weder in rot noch mit Bleistift.

Viel Erfolg!

Nachname: Vorname:

Geburtsdatum: Matrikelnummer:

Semesterzahl: Fachrichtung:

Unterschrift:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Zus.*	Summe
Punkte										

Aufgabe 1 (2+2+2+2+2=10 Punkte). Im Folgenden werden einige Grundbegriffe der Vorlesung abgefragt.

(a) Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Wann nennen wir eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph?

(b) Was verstehen wir unter dem Konvergenzradius einer formalen Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \, ?$$

(c) Sei γ ein geschlossener, stückweise glatter Weg. Definieren Sie die Spur γ^* von γ sowie die Umlaufzahl von γ bzgl. eines beliebigen Punktes $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

(d) Sei $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge holomorpher Funktionen auf der offenen Menge Ω. Wann heißt die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ normal konvergent auf Ω?

(e) Seinen $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ offen. Wann nennen wir Ω_1 und Ω_2 biholomorph äquivalent?

Aufgabe 2 (2+2+2+2+2=10 Punkte). Formulieren Sie die folgenden Sätze der Vorlesung. Geben Sie dabei *alle* Voraussetzungen sowie die vollständige Aussage des Satzes an.

(a) Formulieren Sie den Riemannschen Hebbarkeitssatz.

(b) Sei $\emptyset \neq G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und seien $f, g \in \mathcal{O}(G)$. Formulieren Sie in dieser Situation die Äquivalenzen des Identitätssatzes.

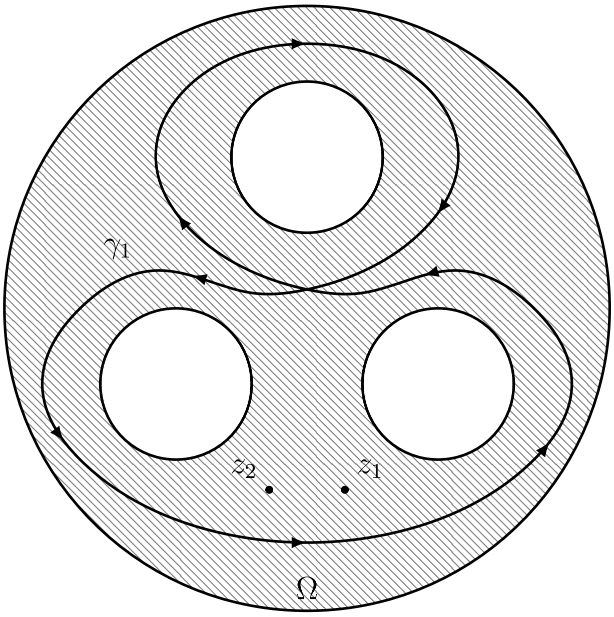
(c) Was besagt der Satz von Montel?

(d) Formulieren Sie den Cauchyschen Integralsatz für Sterngebiete.

(e) Formulieren Sie den Riemannschen Abbildungssatz.

Aufgabe 3 (3+3+4=10 Punkte).

(a) In der nachfolgenden Grafik sind eine offene Menge Ω, zwei Punkte $z_1, z_2 \in \Omega$ sowie ein geschlossener, glatter Weg γ_1 dargestellt.

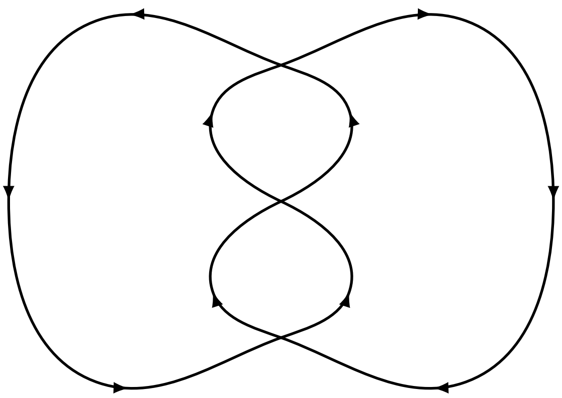


(i) Ergänzen Sie in der Zeichnung **zwei** geschlossene, glatte Wege γ_2, γ_3 in Ω, sodass der dadurch entstehende Zyklus $\Gamma := \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ nullhomolog in Ω ist und sodass zugleich $\mathrm{Ind}_\Gamma(z_1) = 1$ und $\mathrm{Ind}_\Gamma(z_2) = 0$ erfüllt ist.

(ii) Sei $f \in \mathcal{O}(\Omega \backslash \{z_1, z_2\})$. Welche Aussage macht der Residuensatz über

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z \ ?$$

(b) Bestimmen Sie den Wert von Ind_γ auf jeder Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ für den nachfolgend dargestellten geschlossenen, glatten Weg γ.



Aufgabe 4 (5+5=10 Punkte)**.** Begründen Sie im Folgenden jeden Ihrer Rechenschritte!

(a) Die Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$u(x, y) := x^3 - 3xy^2 - 2x^2 + 2y^2 + 1.$$

Zeigen Sie, dass u auf $\mathbb{C}$ harmonisch ist, und bestimmen Sie anschließend eine ganze Funktion f mit $f(0) = 1$, sodass $\mathrm{Re}(f(x + iy)) = u(x, y)$ auf ganz $\mathbb{C}$ gilt.

(b) Berechnen Sie die Laurententwicklung der durch

$$f(z) := \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$$

definierten holomorphen Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0, 1, 2\} \to \mathbb{C}$ auf den beiden Ringgebieten

$$R_1 := \{z \in \mathbb{C} |\ 0 < |z| < 1\} \qquad \text{und} \qquad R_2 := \{z \in \mathbb{C} |\ 1 < |z| < 2\}.$$

Bestimmen Sie ferner das Residuum $\mathrm{Res}(f; 0)$.

Aufgabe 5 (5+5=10 Punkte)**.** Begründen Sie im Folgenden jeden Ihrer Rechenschritte!

(a) Bestimmen Sie für die beiden komplexen Polynome

$$p(z) := z^5 + 4z^3 - 2 \qquad \text{und} \qquad q(z) := 4z^3 - 2$$

jeweils die Anzahl der Nullstellen (unter Berücksichtigung von Vielfachheiten), die in der Einheitskreisscheibe $D(0,1)$ liegen.

(b) Gibt es eine ganze Funktion f mit der Eigenschaft

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2^n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\ ?$$

Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 6 (5+5=10 Punkte)**.** Begründen Sie im Folgenden jeden Ihrer Rechenschritte!

(a) Gegeben seien $a, b > 0$ mit $a \neq b$. Zeigen Sie, dass

$$\int_0^\infty \frac{1}{(a^2+x^2)(b^2+x^2)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2ab(a+b)}.$$

(b) Sei $r > 1$. Zeigen Sie: Ist $f : D_r(0) \to \mathbb{C}$ holomorph, dann gilt

$$\int_0^{2\pi} f(e^{it}) \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \mathrm{d}t = \pi\Big(f(0) - \frac{1}{2}f'(0)\Big).$$

Aufgabe 7 (5+5=10 Punkte)**.** Begründen Sie im Folgenden jeden Ihrer Beweisschritte!

(a) Sei $\emptyset \neq G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, für die

$$\overline{f} : G \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \overline{f(z)}$$

ebenfalls holomorph ist. Zeigen Sie, dass f auf G konstant ist.

(b) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $A \subset \Omega$ diskret in Ω und $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus A)$. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{Res}(f'; a) = 0 \qquad \text{für alle } a \in A.$$

Aufgabe 8 (5+5=10 Punkte)**.** Begründen Sie im Folgenden jeden Ihrer Beweisschritte!

(a) Sei f eine ganze Funktion, für die es Konstanten $C > 0$ und $0 \le \alpha < 1$ gibt, sodass

$$|f(z)| \le C\big(1 + |z|\big)^{\alpha} \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

gilt. Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{C}$ konstant ist.

Welche aus der Vorlesung bekannte Aussage liefert dies im Fall $\alpha = 0$?

(b) Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, die die Bedingung

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|) < \infty$$

erfüllt. Wir betrachten die Funktionenfolge $(g_n)_{n=1}^{\infty}$, die gegeben ist durch

$$g_n : \mathbb{D} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{|a_n|}{a_n} \cdot \frac{a_n - z}{1 - \overline{a_n} z}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass das unendliche Produkt $\prod_{n=1}^{\infty} g_n$ kompakt auf $\mathbb{D}$ gegen eine holomorphe Funktion $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ konvergiert, und bestimmen Sie die Nullstellen von g sowie deren Vielfachheiten.

Zusatzaufgabe* (10 Punkte)**.** Begründen Sie im Folgenden jeden Ihrer Beweisschritte!

Beweisen Sie die folgende Verallgemeinerung der lokalen Form des Maximumprinzips:

> **Satz.** *Sei* $\emptyset \neq G \subseteq \mathbb{C}$ *ein Gebiet und seien* $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}(G)$ *für ein* $n \in \mathbb{N}$. *Besitzt die Funktion*
>
> $$u: \ G \to [0, \infty), \quad z \mapsto \sum_{j=1}^{n} |f_j(z)|^2$$
>
> *in einem Punkt* $z_0 \in G$ *eine lokale Maximumstelle, dann sind bereits alle Funktionen* $f_1, \dots, f_n$ *auf* G *konstant.*