UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Dr. Tobias Mai
M.Sc. Felix Leid

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie
Sommersemester 2017

Klausurvorbereitungsblatt
Lösungsvorschläge

---

(5) Bestimmen Sie alle Punkte, in denen die durch $f(x+iy) = xye^{x+iy}$ definierte Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist.

Lösung. Wir schreiben $z = x + iy$. Damit haben wir

$$x = \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \qquad \text{und} \qquad y = \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$$

und können schließlich

$$f(z) = \frac{1}{4i}(z + \overline{z})(z - \overline{z})e^z$$

schreiben. Wir berechnen nun mithilfe der Produktregel, dass

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = \frac{1}{4i}(z - \overline{z})e^z - \frac{1}{4i}(z + \overline{z})e^z = -\frac{1}{2i}\overline{z}e^z.$$

Da f stetig partiell differenzierbar ist, ist die komplexe Differenzierbarkeit an einer Stelle $z \in \mathbb{C}$ äquivalent zu $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = 0$. Weil die Funktion $z \mapsto e^z$ keine Nullstelle besitzt, können wir folgern, dass f nur bei $z = 0$ komplex differenzierbar ist.

(6) Sei $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $v(x, y) = 4x^3y - 4xy^3 + 2y$. Zeigen Sie, dass v harmonisch ist, und bestimmen Sie eine ganze Funktion f, die $\operatorname{Im}(f(x+iy)) = v(x, y)$ auf ganz $\mathbb{C}$ erfüllt.

Lösung. Wir berechnen

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 12x^2y - 4y^3 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, y) = 24xy$$

sowie

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = 4x^3 - 12xy^2 + 2 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x, y) = -24xy.$$

Es folgt also $\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \equiv 0$, d.h. v ist harmonisch. Wir suchen nun eine Funktion $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die zusammen mit v die Cauchy Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

erfüllt. Wir folgern

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 4x^3 - 12xy^2 + 2 \qquad \Longrightarrow u(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + 2x + C_1(y)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 4y^3 - 12x^2y \qquad \Longrightarrow u(x,y) = y^4 - 6x^2y^2 + C_2(x),$$

wobei $C_1, C_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen sind. Durch Vergleich dieser beiden Darstellungen sehen wir, dass $C_1(y) = y^4 + c$ und $C_2(x) = x^4 + 2x + c$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ gelten muss. Damit ist

$$u(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 2x + c$$

die gesuchte Funktion, für die $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ eine ganze Funktion darstellt. (Man sieht leicht, dass in der Tat $f(z) = z^4 + 2z$ gilt.)

(7) Sei $r > 0$ und $f\colon D(0,r) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die auf $D(0,r) \cap \mathbb{R}$ nur reelle Werte annehme. Beweisen Sie, dass die Koeffizienten $(a_n)_{n=0}^\infty$ in der Potenzreihenentwicklung von f um den Punkt 0 alle reell sind und dass $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ für alle $z \in D(0,r)$ gilt.

Lösung. Wir betrachten die Funktion $g\colon D(0,r) \to \mathbb{C}$, die gegeben ist durch $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$. Aus den Übungen ist bekannt, dass g holomorph ist, und weil f nach Voraussetzung auf $D(0,r) \cap \mathbb{R}$ nur reelle Werte annimmt, gilt zudem $f(z) = g(z)$ für alle $z \in D(0,r) \cap \mathbb{R}$. Da $D(z,r)$ zusammenhängend ist, liefert uns der Identitätssatz, dass $f(z) = g(z)$ schon für alle $z \in D(0,r)$ gelten muss. Wir sehen also, dass $\overline{f(\overline{z})} = f(z)$ und somit $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ für alle $z \in D(0,r)$ erfüllt ist.

Betrachte nun die Potenzreihenentwicklung $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ von f auf $D(0,r)$ mit Entwicklungspunkt 0. Wegen $f(z) = \overline{f(\overline{z})}$ haben wir auch $f(z) = \overline{\sum_{n=0}^\infty a_n \overline{z}^n} = \sum_{n=0}^\infty \overline{a_n} z^n$, woraus wegen der Eindeutigkeit der Koeffizienten $a_n = \overline{a_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ folgt. Dies bedeutet, dass alle a_n reell sind.

(8) Es seien f eine ganze Funktion und P ein holomorphes Polynom. Es gebe ein $C > 0$, sodass $|f(z)| \leq C|P(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass dann $f = \lambda P$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ gelten muss.

Lösung. Wir betrachten zunächst den Fall, dass P das Nullpolynom ist. Dann erzwingt die Bedingung $|f(z)| \leq C|P(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$, dass auch f identisch Null ist, weshalb $f = \lambda P$ trivialerweise für beliebiges $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt.

Wir können also nun annehmen, dass P nicht das Nullpolynom ist. In diesem Fall ist Nullstellenmenge $A := \mathcal{N}(P)$ von P endlich und somit insbesondere diskret. Die Funktion

$$g_0 : \ \mathbb{C} \setminus A \to \mathbb{C}, \ z \mapsto \frac{f(z)}{P(z)}$$

ist also holomorph (als Quotient holomorpher Funktionen, wobei der Nenner P nach Konstruktion nullstellenfrei ist) mit isolierten Singularitäten in A. Wegen $|f(z)| \leq C|P(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt zudem $|g_0(z)| \leq C$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus A$. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz sind daher alle Singularitäten von g_0 hebbar, d.h., g_0 lässt sich zu einer ganzen Funktion g fortsetzen. Da diese Fortsetzung insbesondere stetig ist, erfüllt sie $|g(z)| \leq C$ für alle $z \in \mathbb{C}$, ist also beschränkt und deshalb nach dem Satz von Liouville konstant; etwa $g \equiv \lambda$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$, wobei genauer $|\lambda| \leq C$ gelten muss. Wir haben also $\frac{f(z)}{P(z)} = g_0(z) = \lambda$ und somit $f(z) = \lambda P(z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus A$, woraus sich aus Stetigkeitsgründen schließlich $f(z) = \lambda P(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ ergibt.

(9) Die Funktionen $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f\colon \mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{2}, 2\} \to \mathbb{C}$ seien gegeben durch

$$u(\vartheta) := \frac{1}{5 - 4\cos(\vartheta)} \qquad \text{und} \qquad f(z) := \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{3}\frac{1}{1-2z}.$$

(i) Zeigen Sie, dass $u(\vartheta) = f(e^{i\vartheta})$ für alle $\vartheta \in \mathbb{R}$ gilt.

(ii) Berechnen Sie die Laurentreihe von f auf $R(0; \frac{1}{2}, 2)$.

(iii) Folgern Sie mithilfe der Substitution $\cos(n\vartheta) = \frac{1}{2}(z^n + z^{-n})$ für $z = e^{i\vartheta}$ aus Ihrem Ergebnis aus Teil (ii), dass die Fourierreihe von u gegeben ist durch

$$u(\vartheta) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n\vartheta).$$

(iv) Bestimmen Sie den Wert des Integrals $\int_0^{2\pi} u(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta$.

Lösung. Wir haben

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{3}\frac{1}{1-2z} \\ &= \frac{1}{3}\frac{(1-2z) - (1-\frac{z}{2})}{(1-\frac{z}{2})(1-2z)} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{z}{1-\frac{5}{2}z + z^2} \\ &= \frac{1}{5 - 2(z + \frac{1}{z})} \end{aligned}$$

und deshalb

$$f(e^{i\vartheta}) = \frac{1}{5 - 2(e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta})} = \frac{1}{5 - 4\cos(\vartheta)} = u(\vartheta).$$

Dies zeigt (i). Da für $z \in R(0; \frac{1}{2}, 2)$ sowohl $|\frac{z}{2}| < 1$ als auch $|\frac{1}{2z}| < 1$ gilt, erhalten wir mithilfe der Formel für die geometrische Reihe

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{3}\frac{1}{1-2z} \\ &= \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} + \frac{1}{6z}\frac{1}{1-\frac{1}{2z}} \\ &= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n + \frac{1}{6z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2z}\right)^n \\ &= \frac{1}{3}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2^{|n|}}z^n. \end{aligned}$$

Dies ist die Laurentreihe von f auf $R(0; \frac{1}{2}, 2)$, womit (ii) erledigt ist. Wir schreiben nun

$$f(z) = \frac{1}{3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{|n|}} z^n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \Big(z^n + \frac{1}{z^n} \Big)$$

und erhalten damit

$$\begin{aligned} u(\vartheta) &= f(e^{i\vartheta}) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \big(e^{in\vartheta} + e^{-in\vartheta} \big) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n\vartheta), \end{aligned}$$

wie in (iii) behauptet. Da die obige Reihe für u gleichmäßig absolut konvergiert, dürfen wir zur Berechnung von $\int_0^{2\pi} u(\vartheta) \mathrm{d}\vartheta$ die obige Fourierreihe verwenden und dabei Summation und Integration vertauschen. Wegen $\int_0^{2\pi} \cos(n\vartheta) \mathrm{d}\vartheta = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt damit

$$\int_0^{2\pi} u(\vartheta) \mathrm{d}\vartheta = \frac{2\pi}{3},$$

womit auch (iv) erledigt ist.

(10) Gibt es eine Funktion $f \in \mathcal{O}(D(0,1))$ mit $|f(z)|^2 + |z|^2 = 1$ für alle $z \in D(0,1)$?

Lösung. Nein, denn dann wäre $|f(z)| = \sqrt{1 - |z|^2}$, womit für alle $0 < r < 1$

$$\max_{t \in [0, 2\pi]} |f(re^{it})| = \sqrt{1 - r^2} < 1 = |f(0)|$$

gelten würde, im Widerspruch zum Maximumprinzip.

(11) Klassifizieren Sie die isolierte Singularität 0 bei beiden Funktionen $f_1(z) := z \sin(\frac{1}{z^2})$ und $f_2(z) := \frac{\cos(z) - 1}{2z^3}$ und bestimmen Sie $\operatorname{Res}(f_1; 0)$ und $\operatorname{Res}(f_2; 0)$.

Lösung. Wir verwenden die bekannten Reihenentwicklungen

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \qquad \text{und} \qquad \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

von sin und cos auf $\mathbb{C}$ mit Entwicklungspunkt 0. Dann ist

$$f_1(z) = z \sin(\frac{1}{z^2}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{4n+1}}$$

und

$$f_2(z) = \frac{\cos(z) - 1}{2z^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2(2n)!} z^{2n-3}.$$

Wir sehen damit, dass f_1 bei 0 eine wesentliche Singularität hat, während f_2 bei 0 einen Pol erster Ordnung besitzt. Ferner können wir aus diesen Laurententwicklungen ablesen, dass

$$\operatorname{Res}(f_1; 0) = 1 \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Res}(f_2; 0) = -\frac{1}{4}.$$

(12) Gegeben sei das Polynom $p(z) = z^4 - 2z + 3$. Bestimmen Sie die Anzahl aller Nullstellen von p, die in $D(0,1)$ liegen, und berechnen Sie $\mathrm{Ind}_\gamma(0)$ für $\gamma := p \circ \gamma_{0,1,\circlearrowleft}$.

Lösung. Ist $z \in D(0,1)$ gegeben, dann haben wir wegen $|z| < 1$

$$|p(z)| \geq 3 - |z^4 - 2z| \geq 3 - (|z|^4 + 2|z|) > 3 - 3 = 0,$$

d.h. p besitzt auf $D(0,1)$ keine Nullstelle. Gemäß dem Argumentprinzip haben wir also

$$\mathrm{Ind}_\gamma(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\zeta} \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{0,1,\circlearrowleft}} \frac{p'(z)}{p(z)} \mathrm{d}z = 0.$$

Man beachte hierbei, dass p auch auf $\partial D(0,1)$ keine Nullstelle haben kann: Wäre etwa $z = e^{it}$ für $t \in [0, 2\pi)$ eine Nullstelle von p, dann hätten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{Re}(p(z)) = \cos(4t) - 2\cos(t) + 3 \qquad \text{und} \\ 0 &= \mathrm{Im}(p(z)) = \sin(4t) - 2\sin(t), \end{aligned} \tag{1}$$

woraus sich leicht

$$\cos^2(4t) = (2\cos(t) - 3)^2 \qquad \text{und} \qquad \sin^2(4t) = 4\sin^2(t),$$

und weiter

$$1 = \cos^2(4t) + \sin^2(4t) = (4\cos^2(t) - 12\cos(t) + 9) + 4\sin^2(t) = 13 - 12\cos(t)$$

folgern lassen würde. Man hätte also $\cos(t) = 1$, womit sich schließlich $t = 0$ ergäbe. Dies erfüllt dann zwar die zweite Gleichung in (1), nicht aber die erste.

`Alternativaufgabe:` Man zeige, dass alle vier Nullstellen von p in $D(0,2)$ liegen. Man wählt hierfür $q(z) = z^4$ und zeigt, dass gilt

$$|p(z) - q(z)| = |-2z + 3| \leq 2|z| + 3 = 7 < 16 = |z|^4 = |q(z)| \qquad \text{für } z \in \partial D(0,2).$$

Der Satz von Rouché erzwingt damit, dass p und q mit Vielfachheiten gezählt die gleiche Anzahl an Nullstellen auf $D(0,2)$ haben. Da q in 0 eine Nullstelle vierter Ordnung hat, hat somit auch p vier Nullstellen in $D(0,2)$; aus Gradgründen sind dies bereits alle Nullstellen von p.

(13) Berechnen Sie die beiden uneigentlichen Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2 + x + 1}{x^4 + 5x^2 + 4} \mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad \int_0^\infty \frac{\cos(x)}{(1 + x^2)^3} \mathrm{d}x.$$

Lösung. (i) Wegen $z^4 + 5z^2 + 4 = (z^2 + 1)(z^2 + 4)$ besitzt

$$f(z) := \frac{2z^2 + z + 1}{z^4 + 5z^2 + 4}$$

isolierte Singularitäten bei $\pm i$ und $\pm 2i$. Da das Polynom im Zähler an keiner dieser Stellen Null wird, besitzt f hier genauer Pole erster Ordnung mit

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}(f; i) &= \lim_{z \to i} (z - i) f(z) = \frac{1 + i}{6} \qquad \text{und} \\ \mathrm{Res}(f; 2i) &= \lim_{z \to 2i} (z - 2i) f(z) = -\frac{2 + 7i}{12}. \end{aligned}$$

Betrachten wir nun für $R > 2$ den Weg

$$\gamma_R = \gamma_{1,R} + \gamma_{2,R}$$

mit

$$\gamma_{1,R}: \ [-R,R] \to \mathbb{C}, \ t \mapsto t \qquad \text{und} \qquad \gamma_{2,R}: \ [0,\pi] \to \mathbb{C}, \ t \mapsto Re^{it},$$

dann liefert der Residuensatz

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{Res}(f;i) + \mathrm{Res}(f;2i) = \frac{1+i}{6} - \frac{2+7i}{12} = -\frac{5}{12}i,$$

da i und $2i$ die einzigen der vier Singularitäten von f sind, die von γ_R umlaufen werden mit $\mathrm{Ind}_\gamma(i) = 1 = \mathrm{Ind}_\gamma(2i)$. Wegen $\lim_{R\to\infty} R\|f\|_{\gamma_{2,R}^*} = 0$ (man beachte hierfür, dass der Zähler von f ein Polynom vom Grad 2 ist, während der Nenner von f Grad 4 hat) folgt nun wie in der Vorlesung

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_{2,R}} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Ferner gilt

$$\int_{\gamma_{1,R}} f(z)\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} \frac{2x^2+x+1}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x,$$

sodass wir zusammenfassend

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2+x+1}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x &= \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{2x^2+x+1}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x \\ &= \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_{1,R}} f(z)dz \\ &= \lim_{R\to\infty}\Big(\underbrace{\int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z}_{=2\pi i(-\frac{5}{12}i)=\frac{5}{6}\pi} - \int_{\gamma_{2,R}} f(z)\mathrm{d}z\Big) \\ &= \frac{5}{6}\pi\end{aligned}$$

erhalten.

(ii) Wir betrachten die beiden holomorphen Funktionen $f, g : \mathbb{C} \setminus \{-i, i\} \to \mathbb{C}$, die gegeben sind durch

$$f(z) := \frac{1}{(1+z^2)^3}e^{iz} \qquad \text{und} \qquad g(z) := \frac{1}{(1+z^2)^3},$$

sowie für $R > 0$ den geschlossenen Rechteckweg

$$\gamma_R = \gamma_{1,R} + \gamma_{2,R} + \gamma_{3,R} + \gamma_{4,R},$$

der die Punkte $-R$, R, $R + iR$ und $-R + iR$ in dieser Reihenfolge durchläuft. Für $R > 1$ gilt nun $\mathrm{Ind}_{\gamma_R}(i) = 1$ und $\mathrm{Ind}_{\gamma_R}(-i) = 0$, sodass der Residuensatz

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{Res}(f;i)$$

liefert. Da f bei i einen Pol dritter Ordnung hat, ergeben die Rechenregeln für Residuen, dass

$$\operatorname{Res}(f;i) = \frac{1}{2}\lim_{z\to i}\Big(\frac{d}{dz}\Big)^2\big((z-i)^3 f(z)\big) = \frac{1}{2e}\Big(-\frac{1}{8}i-\frac{3}{8}i-\frac{3}{8}i\Big) = -\frac{7i}{16e},$$

denn es ist $(z-i)^3 f(z) = \frac{e^{iz}}{(z+i)^3}$ und daher

$$\Big(\frac{d}{dz}\Big)\big((z-i)^3 f(z)\big) = i\frac{e^{iz}}{(z+i)^3} - 3\frac{e^{iz}}{(z+i)^4}$$

sowie

$$\Big(\frac{d}{dz}\Big)^2\big((z-i)^3 f(z)\big) = -\frac{e^{iz}}{(z+i)^3} - 3i\frac{e^{iz}}{(z+i)^4} - 3i\frac{e^{iz}}{(z+i)^4} + 12\frac{e^{iz}}{(z+i)^5}.$$

Wir halten fest, dass laut Vorlesung wegen

$$\lim_{R\to\infty}\|g\|_{\gamma_{j,R}^*} = 0 \qquad \text{für } j=2,3,4$$

bereits

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_{j,R}} f(z)\mathrm{d}z = 0 \qquad \text{für } j=2,3,4$$

gilt. Ferner haben wir

$$\int_{\gamma_{1,R}} f(z)\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R}\frac{1}{(1+x^2)^3}e^{ix}\mathrm{d}x,$$

sodass sich zusammenfassend

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^3}e^{ix}\mathrm{d}x &= \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{1}{(1+x^2)^3}e^{ix}\mathrm{d}x \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_{1,R}} f(z)\mathrm{d}z \\
&= \lim_{R\to\infty}\Big(\underbrace{\int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z}_{=2\pi i(-\frac{7i}{16e})=\frac{7\pi}{8e}} - \sum_{j=2}^{4}\int_{\gamma_{j,R}} f(z)\mathrm{d}z\Big) \\
&= \frac{7\pi}{8e}
\end{aligned}$$

ergibt. Man beachte hierbei, dass dieses uneigentliche Integral sogar absolut konvergent ist, weshalb seine Existenz nicht noch eigens nachgewiesen werden muss; deshalb genügt es hier, den vereinfachten Weg γ_R zu betrachten.

Nach Übergang zum Realteil erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(x)}{(1+x^2)^3}\mathrm{d}x = \frac{7\pi}{8e}$$

und damit, wegen der Symmetrie des Integranden, schließlich den Wert des zu bestimmenden Integrals

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\cos(x)}{(1+x^2)^3}\mathrm{d}x = \frac{7\pi}{16e}.$$

(14) Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Funktionen $f \in \mathcal{O}(D(0,1))$ mit der Eigenschaft

$$\sup_{0\leq r<1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|\mathrm{d}t \leq 1.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ eine normale Familie ist.

Lösung. Seien $f \in \mathcal{F}$ und $z \in D(0,1)$ gegeben. Wir wählen $0 < r < 1$ mit $z \in D(0,r)$. Nach der Cauchyschen Integralformel gilt dann

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{0,r,\circlearrowleft}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{it})\frac{re^{it}}{re^{it}-z}\mathrm{d}t$$

und damit (wegen der Standardabschätzung für Wegintegrale)

$$|f(z)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|\Big|\frac{re^{it}}{re^{it}-z}\Big|\mathrm{d}t \leq \frac{r}{r-|z|}\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{it})|\mathrm{d}t}_{\leq 1} \leq \frac{r}{r-|z|}$$

Für $r \nearrow 1$ erhalten wir also

$$|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}.$$

Betrachten wir nun die stetige Funktion $\omega : D(0,1) \to [0,\infty)$, $z \mapsto \frac{1}{1-|z|}$, dann erfüllt jedes $f \in \mathcal{F}$ die Bedingung $|f(z)| \leq \omega(z)$ für alle $z \in D(0,1)$. Ist nun $K \subset D(0,1)$ kompakt, dann haben wir deshalb

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \|f\|_K \leq \max_{z\in K} |\omega(z)| < \infty.$$

Somit ist $\mathcal{F}$ lokalbeschränkt, nach dem Satz von Montel also eine normale Familie.

(15) Konstruieren Sie eine ganze Funktion f, die Nullstellen zweiter Ordnung in allen Punkten aus $\{\sqrt{n} | n \in \mathbb{N}\}$ hat und ansonsten keine weiteren Nullstellen besitzt.

Lösung. Wir betrachten die Folge

$$(a_n)_{n=1}^\infty = (1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \ldots, \sqrt{n}, \sqrt{n}, \sqrt{n+1}, \sqrt{n+1}, \ldots).$$

Dann ist $(a_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, die zudem $|a_n| \to \infty$ für $n \to \infty$ erfüllt. Weiter stellen wir fest, dass für alle $r > 0$ gilt

$$\sum_{n=1}^\infty \Big(\frac{r}{|a_n|}\Big)^3 = r^3\sum_{n=1}^\infty \Big(\frac{1}{|a_n|}\Big)^3 = r^3\sum_{m=1}^\infty \Big(\frac{1}{|a_{2m-1}|^3} + \frac{1}{|a_{2m}|^3}\Big) = 2r^3\sum_{m=1}^\infty \frac{1}{m^{3/2}} < \infty.$$

Somit sind die Voraussetzungen von Satz 12.10 mit der Wahl $p_n = 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. Das unendliche Produkt

$$f(z) = \prod_{n=1}^\infty E_2\Big(\frac{z}{a_n}\Big) = \prod_{n=1}^\infty \Big(1 - \frac{z}{a_n}\Big)\exp\Big(\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\Big(\frac{z}{a_n}\Big)^2\Big).$$

konvergiert deshalb auf $\mathbb{C}$ kompakt gegen eine ganze Funktion f, die Nullstellen genau in $A = \{a_n |\, n \in \mathbb{N}\} = \{\sqrt{n} |\, n \in \mathbb{N}\}$ hat. Die Vielfachheiten ergeben sich nach Konstruktion als

$$\operatorname{ord}(f; a) = \#\{n \in \mathbb{N} |\, a_n = a\} = 2 \qquad \text{für alle } a \in A.$$

Die so konstruierte Funktion f leistet somit das Gewünschte. Wegen der kompakten Konvergenz können wir f umschreiben als

$$f(z) = \prod_{m=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z}{\sqrt{m}}\Big)^2 \exp\Big(2\frac{z}{\sqrt{m}} + \frac{z^2}{m}\Big).$$