

## Angaben zu Literatur und Voraussetzungen zu Vorlesung

# Hilbertmoduln und ihre Anwendung

von Michael Skeide

**E-Mail:** [skeide@unimol.it](mailto:skeide@unimol.it)

**Homepage:** <http://web.unimol.it/skeide/>

### Voraussetzungen

Bei der Vorlesung gehe ich davon aus, daß die Inhalte einer Vorlesung in Funktionalanalysis (sowie natürlich deren Voraussetzungen) geläufig sind. Texte wie Rudin [Rud87] (auch auf Deutsch erhältlich) oder Pedersen [Ped89], die beide die Gelfand-Transformation behandeln (obgleich bei [Rud87] nur in den Übungen), sind wirklich exzellente Bücher für unsere Bedürfnisse. Ein “kompletter” Text ist Rudin [Rud91].

Kenntnisse in  $C^*$ - und von Neumann-Algebren sind zwar hilfreich, aber nicht zwingend erforderlich. Was notwendig ist, wird in der Vorlesung erwähnt, und kann in der parallel laufenden Vorlesung *Operatoralgebren* (Prof. Weber) erarbeitet werden. Eine exzellentes Buch (das ebenfalls auch die Gelfand-Transformation behandelt, nicht aber deren funktionalanalytische Voraussetzungen) ist Murphy [Mur90]. (Es ist wichtig,  $C^*$ -Algebren nicht nur als Operatoralgebren zu sehen, sondern vor allem als abstrakte Banach-Algebren mit einer Zusatzbedingung. Es gibt nicht viele Bücher, die, so wie [Mur90], diesen Standpunkt konsequent vertreten.) Die Kenntnisse bis einschließlich Kapitel 4 (von Neumann-Algebren) sollten völlig ausreichend sein. Sie müssen lediglich noch durch einige, wenige Zusatzkenntnisse bezüglich sogenannter *normaler* Abbildungen ergänzt werden. In diesen Zusammenhang seien noch die beiden Anhänge 4.1-3 in Meyers Buch [Mey93] (achtung, es existiert eine zweite Auflage!) erwähnt, die eine wirklich vorzügliche eigenständige Zusammenfassung über  $C^*$ - und von Neumann-Algebren abliefern. Ein allgemeine und sehr nützliche Referenz für Operatoralgebren (mit vielen Fakten und Resultaten allerdings meist ohne Beweise oder nur mit Beweisskizzen bzw. einem Erläutern der Beweisideen) ist Blackadars enzyklopädischer Beitrag [Bla06].

## Literaturangaben

Außer der bereits erwähnten Literatur über Operatoralgebren, möchte ich hier noch einige nützliche Referenzen über Hilbertmoduln sammeln. *Das* Buch, das sich formal nur Hilbertmoduln widmet, ist Lance [Lan95]. Wenn ein Buch anzuschaffen ist, dann dieses (auch als *e-book*). Es enthält eine gut lesbare Einführung und häufig auch gute Beweise. Ich sage ‚*das* Buch‘, weil es außer diesem, nur noch ein weiteres Buch gibt (Manuilov-Troitsky [MT05]), daß sich ausschließlich Hilbertmoduln beschäftigt. Im Gegensatz zu [Lan95], ist [MT05] extrem trocken geschrieben, und obwohl es sehr viele Einzelresultate enthält, die man sonst nur in der Originalliteratur findet (und deswegen häufig selber beweist, bevor man sie gefunden hat), sind die Beweise und der Aufbau schlicht unmotiviert. Warnungen bezüglich [Lan95] werden in der Vorlesung Erwähnung finden ....

Darüber hinaus gibt es diverse Bücher mit Kapiteln über Hilbertmoduln, weil die Gebiete, die in diesen Büchern behandelt werden, nicht ohne Hilbertmoduln auskommen. Das wohl beste Beispiel ist Raeburn-Williams [RW98]. Andere Bücher sind (ohne Anspruch auf Vollständigkeit) Blackadar [Bla86], Jensen-Thomsen [JT91] und Wegge-Ohlson [WO93]. *Last but not least* möchte ich noch meine Habilitationsschrift [Ske01] erwähnen. Sie wird, in der Tat, für einige Teile der Vorlesung (vor allem, was Beweise anbelangt) als Modell dienen. Sie liefert jedoch nur die halbe Wahrheit, was von Neumann-Moduln anbelangt. Und was die Organisation der Resultate über Produktsysteme anbelangt (nicht aber Inhalt und Beweise!), ist sie seit der Einführung des „richtigen“ Spazialitätsbegriffes in [Ske06b] als obsolet zu bezeichnen.

Wir haben uns mit den letzten Bemerkungen hochaktuellen Fragestellungen genähert, über die es noch keine Bücher gibt. Eine gute Einführung und Zusammenfassung unseres Erkenntnisstandes über Produktsysteme findet sich in der Einleitung zu [Ske09a] – immerhin auch so etwas wie ein Buch. Es dient auch als Quelle zum Nachlesen für diverse aktuelle Resultate, die ich in der Vorlesung besprechen werde. Schlimmer ist die Situation, was von Neumann-Moduln anbelangt – also das, was über meine Habilitation hinausgeht. Ein sehr wichtiger Artikel dafür ist [Ske09b], in dem wir (außer den ernsthaften Anwendungen) z.B. die gesamte Darstellungstheorie von von Neumann–Algebren durch von Neumann-Moduln erfassen. Besonders relevant für die Vorlesung sind noch [MSS06, Ske06a] wo die Darstellungstheorie und Eilenberg-Watts-Theoreme aufs Korn genommen werden.

Andere Literaturangaben folgen in der Vorlesung.

**Für ganz Neugierige und Ungeduldige:** Der *survey* [Ske11] (s. meine Homepage oder das *arXiv*) bespricht eine Sichtweise auf Hilbertmoduln, wie ich sie vermutlich zur Motivation der Axiomatik in der Vorlesung heranziehen werde.

## Literatur

- [Bla86] B. Blackadar, *K-Theory for operator algebras*, Springer, 1986.
- [Bla06] ———, *Operator algebras*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, no. 122 (number III in the subseries Operator Algebras and Non-Commutative Geometry), Springer, 2006.
- [JT91] K.K. Jensen and K. Thomsen, *Elements of KK-theory*, Birkhäuser, 1991.
- [Lan95] E.C. Lance, *Hilbert  $C^*$ -modules*, Cambridge University Press, 1995.
- [Mey93] P.A. Meyer, *Quantum probability for probabilists*, Lect. Notes Math., no. 1538, Springer, 1993.
- [MSS06] P.S. Muhly, M. Skeide, and B. Solel, *Representations of  $B^a(E)$* , *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* **9** (2006), 47–66, (arXiv: math.OA/0410607).
- [MT05] V.M. Manuilov and E.V. Troitsky, *Hilbert  $C^*$ -modules*, *Translations of Mathematical Monographs*, no. 226, American Mathematical Society, 2005.
- [Mur90] G.J. Murphy,  *$C^*$ -Algebras and operator theory*, Academic Press, 1990.
- [Ped89] G.K. Pedersen, *Analysis now (revised printing)*, Springer, 1989.
- [Rud87] W. Rudin, *Real and complex analysis (3rd ed.)*, McGraw-Hill, 1987.
- [Rud91] ———, *Functional analysis (2nd ed.)*, McGraw-Hill, 1991.
- [RW98] I. Raeburn and D.P. Williams, *Morita equivalence and continuous-trace  $C^*$ -algebras*, *Mathematical Surveys and Monographs*, no. 60, American Mathematical Society, 1998.
- [Ske01] M. Skeide, *Hilbert modules and applications in quantum probability*, *Habilitations-schrift*, Cottbus, 2001, Available at <http://web.unimol.it/skeide/>.
- [Ske06a] ———, *Commutants of von Neumann correspondences and duality of Eilenberg-Watts theorems by Rieffel and by Blecher*, *Banach Center Publications* **73** (2006), 391–408, (arXiv: math.OA/0502241).
- [Ske06b] ———, *The index of (white) noises and their product systems*, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* **9** (2006), 617–655, (Rome, Volterra-Preprint 2001/0458, arXiv: math.OA/0601228).

- [Ske09a] ———, *Classification of  $E_0$ -semigroups by product systems*, Preprint, arXiv: 0901.1798v4, To appear in Mem. Amer. Math. Soc., 2009.
- [Ske09b] ———, *Unit vectors, Morita equivalence and endomorphisms*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **45** (2009), 475–518, (arXiv: math.OA/0412231v5 (Version 5)).
- [Ske11] ———, *Hilbert modules—square roots of positive maps*, Quantum Probability and Related Topics — Proceedings of the 30th Conference (R. Rebolledo and M. Orszag, eds.), Quantum Probability and White Noise Analysis, no. XXVII, World Scientific, 2011, (arXiv: 1007.0113v1), pp. 296–322.
- [WO93] N.E. Wegge-Olsen,  *$K$ -Theory and  $C^*$ -algebras*, Oxford University Press, 1993.

Alle meine Arbeiten sind, zumindest als *preprints*, auch auf meiner Homepage zu finden:  
<http://web.unimol.it/skeide/>