UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Operatoralgebren
Sommersemester 2013

Blatt 1
Abgabe: Dienstag, 23.4.2013, 8:30 Uhr
in den Briefkästen beim Zeichensaal, Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (20! Punkte)**.** Sei A eine nicht-unitale C^*-Algebra.

(a) Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 1.10 der Vorlesung. Zeigen Sie also, dass die assoziierte Multiplikatoralgebra $M(A)$ eine unitale C^*-Algebra ist und dass

$$A \to M(A), \qquad a \mapsto (L_a, R_a)$$

ein isometrischer *-Homomorphismus ist. Zeigen Sie auch, dass A in $M(A)$ ein Ideal ist.

Eine nicht-unitale C^*-Algebra lässt sich also immer (als ein Ideal) in eine unitale C^*-Algebra einbetten.

(b) Zeigen Sie, dass die Multiplikatoralgebra die *größte* Unitalisierung von A ist:

Ist B eine unitale C^*-Algebra und ist $A \subset B$ als ein Ideal eingebettet, dann gibt es einen *-Homomorphismus von B nach $M(A)$, der die Einbettung $A \subset M(A)$ fortsetzt.

(c) Zeigen Sie, dass die Konstruktion $\tilde{A}$ von Satz 1.12 der Vorlesung die *kleinste* Unitalisierung einer nicht-unitalen C^*-Algebra A ist:

Ist B eine unitale C^*-Algebra und ist $A \subset B$ als ein Ideal eingebettet, dann gibt es einen *-Homomorphismus von $\tilde{A}$ nach B, der die Einbettung $A \subset B$ fortsetzt.

Aufgabe 2 (20! Punkte)**.** Sei Ω ein lokalkompakter Raum und sei $A = \mathcal{C}_0(\Omega)$.

(a) Zeigen Sie, dass A nicht unital ist, falls Ω nicht kompakt ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Multiplikatoralgebra $M(A)$ die Algebra $\mathcal{C}_b(\Omega)$ der beschränkten, stetigen Funktionen auf Ω ist.

(c) Die *Einpunkt-Kompaktifizierung* von Ω ist gegeben durch die Menge $\Omega^+ := \Omega \cup \{\infty\}$ zusammen mit der folgenden Topologie: Eine Menge $U \subset \Omega^+$ ist eine Umgebung von $x \in \Omega$ genau dann, wenn $U \cap \Omega$ eine Umgebung von x ist. Eine Menge $U \subset \Omega^+$ ist eine Umgebung von ∞ genau dann, wenn U das Komplement einer kompakten Menge in Ω enthält.

Zeigen Sie, dass Ω^+ kompakt ist und dass $\tilde{A}$ isomorph ist zu $\mathcal{C}(\Omega^+)$.