



Übungen zur Vorlesung Operatoralgebren
Sommersemester 2013

Blatt 2

Abgabe: Montag, 29.4.2013, 12:00 Uhr
in den Briefkästen beim Zeichensaal, Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte). Zeigen Sie, dass die Multiplikatoralgebra $M(\mathcal{K}(H))$ der kompakten Operatoren die beschränkten Operatoren $B(H)$ auf demselben (separablen) Hilbertraum H sind.

Aufgabe 2 (10 Punkte). Sei A eine C^* -Algebra.

- (a) Ein Element $p \in A$ heißt *Projektion*, falls $p = p^* = p^2$ gilt. Berechnen Sie das Spektrum $\sigma(p)$ einer Projektion $p \in A$.
- (b) Sei A unital. Ein Element $v \in A$ heißt *Symmetrie*, falls $v = v^*$ und $v^2 = 1$ gilt. Berechnen Sie das Spektrum $\sigma(v)$ einer Symmetrie $v \in A$.
- (c) Welchen Zusammenhang gibt es zwischen Projektionen und Symmetrien?

Aufgabe 3 (10 Punkte). Sei Z ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $M \subset Z$ heißt *nicht zusammenhängend*, falls es zwei nicht-leere, disjunkte, abgeschlossene Teilmengen X und Y gibt, so dass $M = X \cup Y$ ist.

Sei A eine kommutative C^* -Algebra. Zeigen Sie, dass A eine Projektion enthält genau dann, wenn das Spektrum $\Omega(A)$ nicht zusammenhängend ist.

Aufgabe 4 (10 Punkte). Sei A eine C^* -Algebra und seien $x, h \in A$ zwei selbstadjungierte Elemente mit $h \geq 0$ und $h \geq x$. Der positive Teil x_+ von x ist definiert per Funktional-

kalkül als $x_+ := f_+(x)$, wobei $f_+ : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben ist durch $f_+(t) := \begin{cases} t & \text{falls } t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

- (a) Zeigen Sie, dass $h \geq x_+$ ist, falls A kommutativ ist.
- (b) Zeigen Sie, dass im Allgemeinen $h \not\geq x_+$ ist, falls A nicht kommutativ ist. Geben Sie dazu ein Gegenbeispiel mit $A = M_2(\mathbb{C})$ an.