UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Operatoralgebren

Sommersemester 2013

Blatt 4

Abgabe: Montag, 13.5.2013, 12:00 Uhr
in den Briefkästen beim Zeichensaal, Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (**20** Punkte)**.** Sei A eine C^*-Algebra. Ein positives Element h von A heißt *strikt positiv*, falls $\overline{hAh} = A$.

(a) Sei A unital. Zeigen Sie, dass ein Element $h \in A$ strikt positiv ist genau dann, wenn es invertierbar ist.

(b) Sei A nicht notwendigerweise unital. Zeigen Sie, dass A ein strikt positives Element besitzt genau dann, wenn A eine abzählbare approximierende Eins besitzt.

(c) Sei A eine C^*-Algebra, die eine abzählbare approximierende Eins besitzt. Zeigen Sie, dass A dann auch eine approximierende Eins $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $u_{n+1}u_n = u_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ besitzt.

(d) Zeigen Sie: Ist $h \in A$ strikt positiv und τ ein Zustand auf A, so gilt $\tau(h) > 0$.

Sie dürfen dabei ohne Beweis Cauchy-Schwarz benutzen: Ist τ ein Zustand auf einer C^*-Algebra A, so gilt $|\tau(y^*x)|^2 \leq \tau(x^*x)\tau(y^*y)$ für alle $x, y \in A$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** (a) Zeigen Sie, dass die C^*-Algebra $M_n(\mathbb{C})$ der komplexwertigen $n \times n$-Matrizen *einfach* ist: Ist I ein abgeschlossenes Ideal in $M_n(\mathbb{C})$, so ist $I = \{0\}$ oder $I = M_n(\mathbb{C})$.

(b) Zeigen Sie, dass $\ker\varphi$ ein Ideal in einer C^*-Algebra A ist, wenn B eine weitere C^*-Algebra und $\varphi : A \to B$ ein *-Homomorphismus ist.

(c) Zeigen Sie, dass es keine *-Homomorphismen von $M_n(\mathbb{C})$ nach $\mathbb{C}$ gibt, wenn $n \geq 2$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Ist $h \in M_n(\mathbb{C})$, so definieren wir $\tau_h : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ durch $\tau_h(x) := \mathrm{tr}(hx)$, wobei $\mathrm{tr} : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ die normalisierte Spur ist, also $\mathrm{tr}(x) = \frac{1}{n}\sum_i x_{ii}$ für $x = (x_{ij})$. Zeigen Sie, dass τ_h ein positives lineares Funktional ist mit $\|\tau_h\| = \mathrm{tr}(h)$, wenn h positiv ist. Zeigen Sie auch, dass *jedes* positive lineare Funktional auf $M_n(\mathbb{C})$ von dieser Form ist.