UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Operatoralgebren
Sommersemester 2013

Blatt 5
Abgabe: Dienstag, 21.5.2013, 8:30 Uhr
in den Briefkästen beim Zeichensaal, Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 4.7 der Vorlesung: Sei τ ein beschränktes Funktional auf einer C^*-Algebra A. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) τ ist positiv.

(ii) Für jede approximierende Eins $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ von A gilt $\|\tau\| = \lim_\lambda \tau(u_\lambda)$.

(iii) Es gibt eine approximierende Eins $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ von A, so dass gilt $\|\tau\| = \lim_\lambda \tau(u_\lambda)$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Sei H ein separabler Hilbertraum und $I \neq 0$ ein abgeschlossenes Ideal in $B(H)$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{K}(H) \subseteq I$ gilt. (Betrachten Sie zunächst Operatoren $\xi \mapsto \langle \xi, \zeta\rangle \eta$ für feste Vektoren $\zeta, \eta \in H$). Man kann sogar zeigen, dass $\mathcal{K}(H)$ das einzige eigentliche abgeschlossene Ideal von $B(H)$ ist. Folgern Sie, dass die Calkin-Algebra $C(K) = B(H)/\mathcal{K}(H)$ einfach ist. Hat $B(H)$ noch weitere *nicht* abgeschlossene Ideale?

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** In Bemerkung 3.13 wurden Fredholm-Operatoren definiert.

(a) Sei $a \in B(H)$ ein Fredholm-Operator. Zeigen Sie, dass es einen Operator $b \in B(H)$ gibt, so dass ab die Projektion auf $\mathrm{ran}(a)$ ist und ba die Projektion auf $(\ker(a))^\perp$. Folgern Sie, dass $1 - ab$ und $1 - ba$ kompakt sind.

(b) Zeigen Sie: $a \in B(H)$ ist ein Fredholm-Operator genau dann, wenn $a + \mathcal{K}(H)$ in der Calkin-Algebra $C(H)$ invertierbar ist. (Sie brauchen dabei jedoch nicht zu zeigen, dass $\mathrm{ran}(a)$ abgeschlossen ist, falls $a + \mathcal{K}(H) \in C(H)$ invertierbar ist.)

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\ker(ba)$ und $\ker(b^*a^*)$ endlich-dimensional sind, falls $1 - ab$ und $1 - ba$ kompakt sind.

Aufgabe 4 (10 + 10* Punkte)**.** Sei $S : \ell_2(\mathbb{N}_0) \to \ell_2(\mathbb{N}_0)$ der unilaterale Shift, also $Se_n = e_{n+1}$. Zeigen Sie, dass sowohl e_0 als auch e_1 zyklische Vektoren sind für die von $T := S + S^*$ erzeugte unitale C^*-Algebra $C^*(T, 1) \subset B(\ell_2(\mathbb{N}_0))$.
Offenes Problem (Zusatzaufgabe): Sind alle e_k, $k \in \mathbb{N}_0$ zyklische Vektoren für $C^*(T, 1)$? Sind alle endlichen Linearkombinationen der e_k zyklische Vektoren? Ist jeder Vektor aus $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ zyklisch oder gibt es auch nicht zyklische Vektoren für $C^*(T, 1)$?