UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Operatoralgebren
Sommersemester 2013

Blatt 6
Abgabe: Montag, 27.5.2013, 12:00 Uhr
in den Briefkästen beim Zeichensaal, Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Seien $e, f \in B(H)$ zwei Projektionen (also $e = e^* = e^2$ und ebenso für f). Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind (wir schreiben dann $e \leq f$):

(i) $ef = e$ (ii) $fe = e$ (iii) $eH \subseteq fH$
(iv) $f - e$ ist eine Projektion (v) $f - e$ ist positiv

Aufgabe 2 (20 Punkte)**.** In Aufgabe 3 von Blatt 4 haben wir alle positiven linearen Funktionale auf $M_n(\mathbb{C})$ bestimmt.

(a) Bestimmen Sie alle Zustände sowie alle reinen Zustände auf $M_n(\mathbb{C})$.

(b) Sei τ ein reiner Zustand auf $M_n(\mathbb{C})$. Wie sieht die zugehörige GNS-Darstellung aus?

(c) Wie sieht die zu der Spur tr auf $M_n(\mathbb{C})$ zugehörige GNS-Darstellung aus?

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Sei τ ein Zustand von A und (H_τ, π_τ) die assoziierte GNS-Darstellung.

(a) Sei I ein abgeschlossenes Ideal in A. Zeigen Sie, dass dann $I \subset \ker \pi_\tau \iff I \subset \ker \tau$.

(b) Ein Zustand τ heißt treu, falls $\tau(a^*a) = 0$ impliziert, dass $a = 0$ ist. Zeigen Sie, dass π_τ treu ist, falls τ treu ist. Gilt auch die Umkehrung? (Tipp: Aufgabe 2 von diesem Blatt und von Blatt 4).