UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Operatoralgebren
Sommersemester 2013

Blatt 7
Abgabe: Montag, 3.6.2013, 12:00 Uhr
in den Briefkästen beim Zeichensaal, Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (20 Punkte)**.** Auf $M_2(\mathbb{C})$ betrachten wir folgende 2×2-Matrizen:

$$\sigma_x := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad 1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass man jede Matrix $h \in M_2(\mathbb{C})$ eindeutig als Linearkombination obiger vier Matrizen schreiben kann (dh. $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, 1$ ist eine Basis für $M_2(\mathbb{C})$).

(b) Zeigen Sie $\sigma_x\sigma_y = -\sigma_y\sigma_x = i\sigma_z$ und $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1$.

(c) Sei $h = \alpha 1 + \beta\sigma_x + \gamma\sigma_y + \delta\sigma_z$. Was bedeutet es für die Koeffizienten, wenn (i) $\mathrm{tr}(h) = \frac{1}{2}$ gilt, (ii) wenn zusätzlich $h = h^*$, (iii) zusätzlich $h^2 = h$ gilt?

(d) Auf Blatt 6 (und Blatt 4) haben wir gesehen, dass $\tau : M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ ein reiner Zustand ist genau dann, wenn $\tau = \tau_{2h}$ gilt, für eine Rang-1-Projektion h. Zeigen Sie, dass jeder reine Zustand auf $M_2(\mathbb{C})$ genau einem Punkt auf der Oberfläche $S_2 \subset \mathbb{R}^3$ der Kugel mit Radius 1 (ggf. nach Reskalierung) entspricht.

(e) Zeigen Sie, dass die Zustände auf $M_2(\mathbb{C})$ den Punkten innerhalb der abgeschlossenen Kugel mit Radius 1 entsprechen, während die reinen Zustände die Extremalpunkte der Kugel sind, also der Oberfläche entsprechen.

(f) Seien τ_{2h} und τ_{2g} reine Zustände, so dass $hg = 0$ ist (die Räume, auf die h bzw. g projezieren, sind also orthogonal zueinander). Was bedeutet das für τ_{2h} und τ_{2g} als Punkte auf der Kugeloberfläche?

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Sei H ein separabler Hilbertraum und sei $\xi \in H$ mit $\|\xi\| = 1$. Zeigen Sie, dass $\tau_\xi : B(H) \to \mathbb{C}$, gegeben durch $\tau_\xi(x) := \langle x\xi, \xi\rangle$, ein reiner Zustand auf $B(H)$ ist. Zeigen Sie dafür zunächst, dass $B(H)' = \mathbb{C}1$ ist (betrachten Sie Operatoren $\omega_{\xi,\eta} \in B(H), \omega_{\xi,\eta}(\zeta) := \langle \zeta, \xi\rangle\eta$ für $\xi, \eta \in H$ – wie wirkt ω_{e_n,e_n}, wobei (e_n) eine ONB ist?). Man kann sich fragen, ob *alle* reinen Zustände von dieser Form sind...

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Sei A eine kommutative C^*-Algebra und τ ein Zustand auf A. Zeigen Sie, dass τ rein ist genau dann, wenn τ ein komplexer Homomorphismus ist. (Benutzen Sie u.a. $B(H)' = \mathbb{C}1$.)