UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Operatoralgebren
Sommersemester 2013

Blatt 8
Abgabe: Dienstag (!), 11.6.2013, 10:00 Uhr
in den Briefkästen beim Zeichensaal, Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Beweisen Sie Lemma 7.6 der Vorlesung: Sei A eine C^*-Algebra und sei $u \in A$. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen (sind sie erfüllt, heißt u *partielle Isometrie*):

(a) $u = uu^*u$, (b) u^*u ist eine Projektion, (c) uu^* ist eine Projektion

Beweisen Sie auch Lemma 7.7: Ist $A = B(H)$, so sind obige Bedingungen äquivalent zu:

(d) $\|u\xi\| = \|\xi\| \quad \forall \xi \in (\ker u)^\perp$, dh. u ist isometrisch auf $(\ker u)^\perp$

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** (a) Beweisen Sie Lemma 7.8 der Vorlesung: Seien $p, q \in B(H)$ zwei Projektionen. Dann gilt $p \sim q$ genau dann, wenn $\dim pH = \dim qH$.

(b) Wir betten $M_3(\mathbb{C}) \oplus M_3(\mathbb{C})$ in $M_6(\mathbb{C})$ per $(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ ein. Dadurch wird $M_3(\mathbb{C}) \oplus M_3(\mathbb{C})$ eine C^*-Unteralgebra von $M_6(\mathbb{C})$. Geben Sie zwei Projektionen $p, q \in M_3(\mathbb{C}) \oplus M_3(\mathbb{C})$ an, die in $M_6(\mathbb{C})$ äquivalent sind, aber nicht in $M_3(\mathbb{C}) \oplus M_3(\mathbb{C})$ (zeigen Sie also, dass es keine partielle Isometrie u in $M_3(\mathbb{C}) \oplus M_3(\mathbb{C})$ gibt, so dass $u^*u = p$ und $uu^* = q$).

(c) Zeigen Sie, dass die C^*-Algebren $M_2(M_2(\mathbb{C}))$ (siehe 5.12 der Vorlesung) und $M_4(\mathbb{C})$ isomorph sind. Geben Sie einen expliziten Isomorphismus an.

(d) Wir betten $M_2(\mathbb{C})$ in $M_4(\mathbb{C})$ per $x \mapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ ein. Zeigen Sie, dass es eine Projektion $p \in M_2(\mathbb{C}) \subset M_4(\mathbb{C})$ gibt, die in $M_2(\mathbb{C})$ minimal ist, aber nicht in $M_4(\mathbb{C})$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 7.13 der Vorlesung: Sei A eine einfache, endlich-dimensionale C^*-Algebra und seien (H_1, π_1) und (H_2, π_2) zwei nicht-entartete Darstellungen von A mit $m_{\pi_1} = m_{\pi_2}$. Zeigen Sie, dass es dann ein Unitäres $u : H_1 \to H_2$ gibt mit $\pi_1(a) = u^*\pi_2(a)u$ für alle $a \in A$.

bitte wenden

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** *universelle C^*-Algebren.*

(a) Finden Sie die natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass für die von zwei kommutierenden Projektionen erzeugte universelle C^*-Algebra

$$A := C^*(p, q \mid p, q \text{ sind Projektionen}, pq = qp)$$

gilt: $A \cong \mathbb{C}^n$. Zu welchen Elementen in A korrespondieren die Basisvektoren $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots, 0) \in \mathbb{C}^n$?

(b) Mit $\mathcal{C}([0,1], M_2(\mathbb{C}))$ bezeichnen wir die C^*-Algebra der stetigen Funktionen auf $[0,1]$ mit Werten in $M_2(\mathbb{C})$, versehen mit der Norm $\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} \|f(x)\|$. Wir können übrigens $\mathcal{C}([0,1], M_2(\mathbb{C}))$ auch mit $M_2(\mathcal{C}([0,1]))$ identifizieren. Zeigen Sie, dass die von zwei nicht notwendigerweise kommutierenden Projektionen erzeugte universelle C^*-Algebra

$$B := C^*(p, q \mid p, q \text{ sind Projektionen})$$

isomorph ist zu

$$D := \{f \in \mathcal{C}([0,1], M_2(\mathbb{C})) \mid f(0) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } f(1) = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix}, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}\}$$

vermöge $\hat{p}(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $\hat{q}(t) := \begin{pmatrix} c^2(t) & s(t)c(t) \\ s(t)c(t) & s^2(t) \end{pmatrix}$, wobei $s(t) := \sin(\frac{\pi}{2}t)$ und $c(t) := \cos(\frac{\pi}{2}t)$, $t \in [0,1]$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass jede irreduzible Darstellung von B höchstens zweidimensional ist.