UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Operatoralgebren
Sommersemester 2013

Blatt 9
Abgabe: Dienstag, 18.6.2013, 10:00 Uhr
in den Briefkästen beim Zeichensaal, Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Sei A eine C^*-Algebra und sei $\pi : A \to B(H)$ eine irreduzible Darstellung. Zeigen Sie: Gilt $\pi(A) \cap \mathcal{K}(H) \neq \{0\}$, so ist $\mathcal{K}(H) \subseteq \pi(A)$. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Zeigen Sie: Ist $0 \neq q \in \pi(A)$ eine Rang-1-Projektion (dh. $qH = \mathbb{C}\eta$ für einen Vektor η), so enthält $\pi(A)$ alle Rang-1-Projektionen, denn $\pi(x_n)\omega_{\eta,\eta}\pi(x_n^*)$ konvergiert in Norm gegen $\omega_{\xi,\xi}$, wenn $\pi(x_n)\eta$ gegen ξ kovergiert. Also $\mathcal{K}(H) \subseteq \pi(A)$.

(ii) Zeigen Sie: Enthält $\pi(A)$ eine minimale Projektion q endlichen Rangs, so ist $q\pi(A)q = q\mathbb{C}$. Außerdem ist $qH = \mathbb{C}\eta$.

(iii) Zeigen Sie: Gilt $\pi(A) \cap \mathcal{K}(H) \neq \{0\}$, so enthält $\pi(A)$ eine Projektion endlichen Rangs. Erinnern Sie sich dafür an die Spektraltheorie kompakter Operatoren.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Sei A eine C^*-Algebra und sei $0 \neq x \in A$. Zeigen Sie, dass dann eine irreduzible Darstellung $\pi : A \to B(H)$ existiert mit $\|\pi(x)\| = \|x\|$.
Hinweis: Zeigen Sie, dass die Menge aller Zustände f auf A mit $f(x^*x) = \|x\|^2$ eine nichtleere, extremale Teilmenge aller positiven linearen Funktionale g auf A mit $\|g\| \leq 1$ ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Zeigen Sie: Für $n \geq 2$ sind isomorph:

(i) $M_n(\mathbb{C})$

(ii) die universelle C^*-Algebra $C^*\left(e_{ij}, i,j = 1,\dots,n \mid e_{ij}^* = e_{ji}, e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il} \quad \forall i,j,k,l\right)$

(iii) die universelle C^*-Algebra $C^*\left(x_1,\dots,x_n \mid x_i^*x_j = \delta_{ij}x_1\right)$

Da $M_n(\mathbb{C})$ einfach ist, gilt also: Wann immer eine C^*-Algebra B Elemente f_{ij} mit obigen Relationen enthält, so ist die davon erzeugte C^*-Unteralgebra isomorph zu $M_n(\mathbb{C})$.
Hinweis für (ii)≅(iii): Zeigen Sie zunächst, dass x_1 eine Projektion ist und dass die x_i also partielle Isometrien sind. Betrachten Sie dann $x_ix_j^*$.

bitte wenden

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Sei G eine endliche Gruppe. Die Menge

$$\mathbb{C}G := \{\sum_{g \in G} \alpha_g \delta_g \mid \alpha_q \in \mathbb{C}\}$$

der formalen Summen über G wird per

$$\left(\sum_g \alpha_g \delta_g\right)\left(\sum_h \beta_h \delta_h\right) := \sum_{g,h} \alpha_g \beta_h \delta_{gh}, \qquad \left(\sum_g \alpha_g \delta_g\right)^* := \sum_g \overline{\alpha_g} \delta_{g^{-1}}$$

eine $*$-Algebra mit Eins δ_e, wobei e das neutrale Element von G ist.

(a) Wir können $\mathbb{C}G$ treu auf $B(\ell^2(G))$ darstellen. Hierzu versehen wir den Hilbertraum $\ell^2(G)$ mit der ONB $(\delta_g)_{g \in G}$ – dh. $\delta_g(h) := \delta_{g,h}$ sind charakteristische Funktionen auf G – und betrachten die *linksreguläre Darstellung* $\lambda : \mathbb{C}G \to B(\ell^2(G))$, gegeben durch $\lambda(\sum \alpha_g \delta_g)(\delta_h) := \sum \alpha_g \delta_{gh}$. Zeigen Sie, dass λ ein treuer $*$-Homomorphismus ist und dass $\mathbb{C}G$ durch Zurückziehen der Norm von $B(\ell^2(G))$ eine C^*-Algebra wird.

(b) Sei $\pi : G \to B(H)$ eine *unitäre Darstellung* der Gruppe G, dh. π ist ein Gruppenhomomorphismus in die Gruppe der unitären Operatoren $\mathcal{U}(H) \subset B(H)$ auf H. Zeigen Sie, dass es zu jeder unitären Darstellung π von G eine Darstellung $\tilde{\pi} : \mathbb{C}G \to B(H)$ der C^*-Algebra $\mathbb{C}G$ gibt mit $\tilde{\pi}(\delta_g) = \pi(g)$. Umgekehrt induziert jede (C^*-)Darstellung von $\mathbb{C}G$ eine (Gruppen-)Darstellung von G.

(c) Sei $\tau : \mathbb{C}G \to \mathbb{C}$ gegeben durch $\tau(\sum \alpha_g \delta_g) = \alpha_e$. Zeigen Sie, dass τ ein treuer Zustand ist.

Bemerkung: Die Gruppenalgebra $\mathbb{C}G$ kann mit den Funktionen $\mathcal{C}(G)$ über G identifiziert werden per $\sum_g \alpha_g \delta_g \leftrightarrow (g \mapsto \alpha_g)$. Allerdings ist die Multiplikation auf $\mathcal{C}(G)$ dann durch die Faltung gegeben:

$$f * g(h) := \sum_{t \in G} f(t) g(t^{-1} h)$$

(Beachte: $\delta_g * \delta_h = \delta_{gh}$.)