UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Operatoralgebren
Sommersemester 2013

Blatt 10
Abgabe: Dienstag, 25.6.2013, 10:00 Uhr
in den Briefkästen beim Zeichensaal, Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass folgende drei C^*-Algebren isomorph sind:

(i) $\mathcal{K}(H)$, wobei H ein separabler Hilbertraum ist

(ii) die universelle C^*-Algebra $C^*\left(e_{ij}, i, j \in \mathbb{N} \mid e_{ij}^* = e_{ji}, e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il} \quad \forall i, j, k, l\right)$

(iii) die universelle C^*-Algebra $C^*\left(x_i, i \in \mathbb{N} \mid x_i^* x_j = \delta_{ij} x_1\right)$

Benutzen Sie Blatt 5, Aufgabe 2, um außerdem noch zu zeigen, dass $\mathcal{K}(H)$ einfach ist.
Hinweis für (i)≅(ii): Nachdem Sie mit Hilfe günstiger Operatoren wie auf Blatt 7 eine Surjektion φ von $A := C^*(e_{ij}, i, j \in \mathbb{N} \mid \ldots)$ nach $\mathcal{K}(H)$ gefunden haben, betrachten Sie $M_n := C^*(e_{ij}, 1 \leq i, j \leq n) \subset A$. Zeigen Sie, dass die Einschränkung von φ auf M_n injektiv ist. Folgern Sie, dass φ auf der Vereinigung aller M_n isometrisch ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Unter einer *Spur* verstehen wir einen Zustand $\tau : A \to \mathbb{C}$ auf einer C^*-Algebra A, der $\tau(xy) = \tau(yx)$ für alle $x, y \in A$ erfüllt. Die Spur heißt *treu*, falls $\tau(x^*x) = 0$ schon $x = 0$ impliziert. Zeigen Sie:

(a) Jede endlich-dimensionale C^*-Algebra besitzt eine treue Spur.

(b) Auf der C^*-Algebra $\mathcal{K}(H)$ der kompakten Operatoren gibt es keine Spur.

Hinweis: Ist $(e_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine ONB und ist $S \in B(H)$ der unilaterale Shift, gegeben durch $Se_n = e_{n+1}$, so ist $S^n(1 - SS^*)(S^*)^n$ die Projektion auf den eindimensionalen Raum $\mathbb{C}e_n \subset H$.

bitte wenden

Aufgabe 3 (20! Punkte)**.** Sei G eine diskrete Gruppe. Die Menge

$$\mathbb{C}G := \{\sum_{g\in G} \alpha_g \delta_g \mid \alpha_g \in \mathbb{C}, \text{nur endlich viele } \alpha_g \neq 0\}$$

der formalen endlichen Summen über G wird mit den Operationen wie auf Blatt 9, Aufgabe 4 zu einer $*$-Algebra mit Eins. Die einhüllende C^*-Algebra laut Definition 9.3 der Vorlesung wird mit $C^*(G)$ bezeichnet.
Man könnte $\mathbb{C}G$ übrigens auch über die linksreguläre Darstellung λ mit einer C^*-Norm versehen, wie auf Blatt 9, aber das ergäbe in vielen Fällen eine *andere* C^*-Algebra, die reduzierte C^*-Algebra $C^*_{\text{red}}(G)$. Für endliche – oder allgemeiner: für amenable – Gruppen wäre es allerdings äquivalent.

(a) Zeigen Sie, dass $C^*(G)$ als universelle C^*-Algebra geschrieben werden kann:

$$C^*(G) \cong C^*(u_g, g \in G \mid u_g \text{ ist unitär}, u_g u_h = u_{gh}, u_g^* = u_{g^{-1}})$$

Hierbei ist $u_e = 1$ die Eins von $C^*(u_g, \ldots)$, wenn $e \in G$ das neutrale Element ist.

Hinweis: Finden Sie *-Homomorphismen von $C^*(G)$ nach $C^*(u_g, \ldots)$ und umgekehrt, deren Komposition jeweils die Identität ist. Stellen Sie dafür zunächst $\mathbb{C}G$ auf $C^*(u_g, \ldots)$ dar und stellen Sie fest, dass das eine C^*-Halbnorm auf $\mathbb{C}G$ liefert. Warum existiert dann also eine Fortsetzung von $C^*(G)$ nach $C^*(u_g, \ldots)$?

(b) Zeigen Sie, dass $C^*(\mathbb{Z})$ isomorph ist zu $\mathcal{C}(S^1)$ (was wiederum nach Kapitel U isomorph ist zu der universellen C^*-Algebra, die von einem Unitären erzeugt wird).