UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Operatoralgebren
Sommersemester 2013

Blatt 11
Abgabe: Dienstag, 9.7.2013, 10:00 Uhr
in den Briefkästen beim Zeichensaal, Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Seien $k, n \in \mathbb{N}$ und sei $\varphi : M_n(\mathbb{C}) \to M_{nk}(\mathbb{C})$ ein *-Homomorphismus.

(a) Sei φ unital. Zeigen Sie, dass φ dann bis auf unitäre Äquivalenz der Form

$$\iota : M_n(\mathbb{C}) \to M_{nk}(\mathbb{C}), \qquad x \mapsto \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

ist, dh. es gibt ein Unitäres $u \in M_{nk}(\mathbb{C})$, so dass $\varphi(x) = u\ \iota(x) u^*$ gilt, für alle $x \in M_n(\mathbb{C})$.

(b) Betrachten Sie auch den Fall, dass φ nicht unital ist.

(c) Ist $M_n(\mathbb{C}) \oplus M_k(\mathbb{C}) \to M_l(\mathbb{C})$ ein Homomorphismus der Form

$$M_n(\mathbb{C}) \oplus M_k(\mathbb{C}) \to M_l(\mathbb{C}), \qquad x \oplus y \mapsto \begin{pmatrix} x &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && x &&&& \\ &&& y &&& \\ &&&& \ddots && \\ &&&&& y & \\ &&&&&& 0 \end{pmatrix}$$

so schreiben wir das diagrammatisch als:

$$\begin{array}{ccc} n & \overset{\alpha}{\to} & l \\ k & \overset{\beta}{\nearrow} & \end{array}$$

Hierbei sind α und β die entsprechenden Multiplizitäten.

Charakterisieren Sie alle Einbettungen (sowohle unitale wie auch nicht-unitale) von $M_2(\mathbb{C}) \oplus M_3(\mathbb{C})$ nach $M_{15}(\mathbb{C})$ bis auf unitäre Äquivalenz mit Hilfe obiger Diagramme.

bitte wenden

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** (a) Welche AF-Algebren werden durch folgende Bratteli-Diagramme beschrieben? Welche sind unital?

$$
\begin{array}{cccccccccc}
(i) & 1 & \rightarrow & 2 & \rightarrow & 3 & \rightarrow & 4 & \rightarrow & \dots
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccccccc}
(ii) & 1 & \rightarrow & 1 & \rightarrow & 1 & \rightarrow & 1 & \rightarrow & \dots \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
 & 1 & \rightarrow & 2 & \rightarrow & 3 & \rightarrow & 4 & \rightarrow & \dots
\end{array}
$$

(b) Zeigen Sie, dass die drei durch die folgenden Bratteli-Diagramme gegebenen AF-Algebren isomorph sind (hierbei bezeichnet $\xrightarrow{2}$ einen Pfeil der Multiplizität 2).

$$
\begin{array}{cccccccccc}
(i) & 1 & \xrightarrow{2} & 2 & \xrightarrow{2} & 4 & \xrightarrow{2} & 8 & \xrightarrow{2} & \dots
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccccccc}
(ii) & 1 & \rightarrow & 2 & \rightarrow & 4 & \rightarrow & 8 & \rightarrow & \dots \\
 & & \searrow\!\!\!\!\!\!\nearrow & & \searrow\!\!\!\!\!\!\nearrow & & \searrow\!\!\!\!\!\!\nearrow & & \searrow\!\!\!\!\!\!\nearrow & \\
 & 1 & \rightarrow & 2 & \rightarrow & 4 & \rightarrow & 8 & \rightarrow & \dots
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccccccccccccc}
(iii) & & \nearrow & 1 & \searrow & & \nearrow & 2 & \searrow & & \nearrow & 4 & \searrow & & & \\
 & 1 & & & & 2 & & & & 4 & & & & 8 & \dots & \\
 & & \searrow & 1 & \nearrow & & \searrow & 2 & \nearrow & & \searrow & 4 & \nearrow & & &
\end{array}
$$

Aufgabe 3 (**20** Punkte)**.** (a) Seien φ und ψ zwei *-Homomorphismen von $\bigoplus_{k=1}^{N} M_{n_k}(\mathbb{C})$ nach $\bigoplus_{l=1}^{M} M_{m_l}(\mathbb{C})$ mit $\mathrm{tr}_{M_{m_l}(\mathbb{C})}(\varphi(E_{11}^{(k)})) = \mathrm{tr}_{M_{m_l}(\mathbb{C})}(\psi(E_{11}^{(k)}))$ für alle l, k, wobei $E_{ij}^{(k)} \in M_{n_k}(\mathbb{C})$, $1 \leq i, j \leq n$ die kanonischen Matrixeinheiten von $M_{n_k}(\mathbb{C})$ sind.

Zeigen sie, dass dann ein Unitäres $u \in \bigoplus M_{m_l}(\mathbb{C})$ existiert, so dass $\varphi(x) = u\psi(x)u^*$ für alle $x \in \bigoplus M_{n_k}(\mathbb{C})$ gilt. (Beginnen Sie mit $N = M = 1$, dann nur $M = 1$, dann der allgemeinen Fall.)

(b) Sei $A = \lim(A_n, \varphi_n)$ eine AF-Algebra mit $A_n = \bigoplus_{k=1}^{N_n} M_{m_k^{(n)}}(\mathbb{C})$. Überlegen Sie sich, dass die Anzahl der Pfeile im zugehörigen Bratteli-Diagramm von $m_k^{(n)}$ nach $m_l^{(n+1)}$ genau durch $\mathrm{tr}_{M_{m_l^{(n+1)}}(\mathbb{C})}(\varphi(E_{11}^{(k)}))$ gegeben ist.

(c) Seien $A = \lim(A_n, \varphi_n)$ und $B = \lim(B_n, \psi_n)$ zwei AF-Algebren, die die gleichen Bratteli-Diagramme besitzen. Zeigen Sie, dass A und B isomorph sind.

Nehmen Sie dazu o.E. an, dass $A_n = B_n$ für alle n ist, und finden Sie Unitäre $u_n \in A_n$, so dass $u_{n+1}\varphi_n(x)u_{n+1}^* = \psi_n(u_n x u_n^*)$ für alle $x \in A_n$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Bemerkung: Die Aufgaben 2 und 3 zeigen also: Verschiedene Bratteli-Diagramme können isomorphe AF-Algebren ergeben, aber verschiedene (dh. nicht-isomorphe) AF-Algebren können nicht das selbe Bratteli-Diagramm haben.