UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Operatoralgebren
Sommersemester 2013

Blatt 12
Abgabe: Dienstag, 23.7.2013, 10:00 Uhr
in den Briefkästen beim Zeichensaal, Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Seien A und B zwei $*$-Algebren. Zeigen Sie, dass es auf dem algebraischen Tensorprodukt $A \otimes B$ genau eine Involution gibt mit

$$(a \otimes b)^* = a^* \otimes b^* \qquad \text{für alle } a \in A \text{ und } b \in B.$$

Hinweis: Verwenden Sie wie im Beweis zu Lemma 11.7 (1) die universelle Eigenschaft des Tensorproduktes. Nutzen Sie ferner aus, dass Sie aus einem Vektorraum H durch Abändern der Skalarmultiplikation gemäß $\lambda \cdot x := \overline{\lambda} x$ einen Vektorraum $\overline{H}$ bilden können.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Seien H und K zwei Hilberträume mit Orthonormalbasen $(\xi_i)_{i\in I}$ und $(\eta_j)_{j\in J}$. Zeigen Sie:

(a) $(\xi_i \otimes \eta_j)_{(i,j)\in I\times J}$ ist eine Orthonormalbasis von $H\hat{\otimes}K$.

(b) Es gilt: $$H\hat{\otimes}K \cong \bigoplus_{j\in J} H\hat{\otimes}(\mathbb{C}\eta_j) \cong \bigoplus_{i\in I} (\mathbb{C}\xi_i)\hat{\otimes}K$$

(c) Für alle $j \in J$ sind die Abbildungen $u_j : \ H \to H\hat{\otimes}K, \ \xi \mapsto \xi \otimes \eta_j$ isometrisch.

(d) Für alle $j_1, j_2 \in J$ gilt $1\hat{\otimes}e_{j_1,j_2} = u_{j_1}u_{j_2}^*$, wobei $e_{j_1,j_2} : \ K \to K, \ \eta \mapsto \langle \eta, \eta_{j_2}\rangle \eta_{j_1}$.

(e) Für $x \in B(H\hat{\otimes}K)$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

  (i) Es gilt $x = a\hat{\otimes}1$ für ein $a \in B(H)$.

  (ii) x kommutiert mit $1\hat{\otimes}b$ für alle $b \in B(K)$.

  (iii) Setzen wir $x_{j_1,j_2} := u_{j_1}^* x u_{j_2} \in B(H)$, so ist

$$x_{j_1,j_2} = 0 \quad \text{und} \quad x_{j_1,j_1} = x_{j_2,j_2} \qquad \text{für alle } j_1, j_2 \in J \text{ mit } j_1 \neq j_2.$$

(Die Matrixdarstellung $(x_{j_1,j_2})_{j_1,j_2\in J}$ von x unter $H\hat{\otimes}K \cong \bigoplus_{j\in J} H$ hat demnach Diagonalgestalt, wobei sogar alle Einträge auf der Diagonalen gleich sind.)

bitte wenden

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.**

(a) Zeigen Sie, dass $M_n(\mathbb{C}) \otimes M_m(\mathbb{C}) \cong M_{nm}(\mathbb{C})$ gilt, und bestimmen Sie damit das Funktional $\mathrm{tr}_n \otimes \mathrm{tr}_m$ auf $M_{nm}(\mathbb{C})$.

(b) Seien A und B zwei $*$-Algebren und seien $\varphi : A \to \mathbb{C}$ und $\psi : B \to \mathbb{C}$ positive lineare Funktionale. Zeigen Sie, dass dann auch $\varphi \otimes \psi : A \otimes B \to \mathbb{C}$ ein positives lineares Funktional ist.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Matrix $(\varphi(a_i^* a_j))_{i,j=1,\dots,n} \in M_n(\mathbb{C})$ für beliebige Elemente $a_1, \dots, a_n \in A$ positiv definit ist. Begründen Sie ferner, dass jede positiv definite Matrix aus $M_n(\mathbb{C})$ als positive Linearkombination eindimensionaler Projektionen geschrieben werden kann.

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Seien X und Y lokalkompakte Hausdorffräume. Zeigen Sie, dass

$$C_0(X)\hat{\otimes}C_0(Y) \cong C_0(X \times Y).$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass jeder Charakter der (klarerweise kommutativen) C^*-Algebra $A := C_0(X)\hat{\otimes}C_0(Y)$ als Produkt eines Charakters auf $C_0(X)$ mit einem Charakter auf $C_0(Y)$ geschrieben werden kann. Das Spektrum von A kann daher als Teilmenge von $X \times Y$ aufgefasst werden.
Beweisen Sie anschließend, dass das Spektrum von A mit $X \times Y$ übereinstimmen muss.