Induktiver
9. Gerichteter Limes von C^*-Algebren

9.1 Def.: Sei A eine $*$-Algebra. Eine C^*-Halbnorm auf A ist eine Halbnorm p (d.h. $p(a) \in [0,\infty)$, $p(a+b) \leq p(a) + p(b)$, $p(\lambda a) = |\lambda| p(a)$), für die zusätzlich für alle $a, b \in A$ gilt:

$$p(ab) \leq p(a)p(b), \quad p(a^*) = p(a), \quad p(a^*a) = p(a)^2$$

Ist p eine Norm (d.h. $p(a) = 0 \Rightarrow a = 0$), so heißt p eine C^*-Norm.

9.2 Lemma: Sei A eine $*$-Algebra und p eine C^*-Halbnorm auf A. Dann ist $N := p^{-1}(0)$ ein selbstadjungiertes Ideal von A und

$$\|a + N\| = p(a) \qquad (a \in A)$$

definiert eine C^*-Norm auf der $*$-Algebra A/N. Die Vervollständigung B von A/N bzgl. $\|\cdot\|$ ist eine C^*-Algebra.

9.3 Def.: 1) B heißt die einhüllende C^*-Algebra von (A, p).

2) Ist p C^*-Norm, so heißt B die C^*-Vervollständigung von A.

<u>Beweis</u>: N Ideal, da $p(ab) \le p(a)p(b)$

$\|\cdot\|$ C^*-Norm auf A/N klar

Multiplikation, Involution setzen sich kanonisch auf Abschlußfort (da $\|\cdot\|$ submultiplikativ und $*$-verträglich:

Sei $a, b \in B \Rightarrow \exists\, a_n, b_n \in A/N$ mit $a_n \to a$, $b_n \to b$

$\Rightarrow a_n b_n$ CF da

$$\|a_n b_n - a_m b_m\| \le \|a_n(b_n - b_m) + (a_n - a_m) b_m\|$$

$$\le \underbrace{\|a_n\|}_{\le A} \underbrace{\|b_n - b_m\|}_{\to 0} + \underbrace{\|a_n - a_m\|}_{\to 0} \underbrace{\|b_m\|}_{\le B}$$

$\Rightarrow a_n b_n \to x$ für $x \in B$; setze $ab := x$

$\rightsquigarrow$ von spezieller Appr. unabhängig)

Norm auf Abschluß B hat gleiche Eigenschaften wie auf A/N

$\Rightarrow B$ C^*-Algebra

□

<u>9.4. Def.</u>: Sei $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von C^*-Algebren und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $\varphi_n : A_n \to A_{n+1}$ ein $*$-Homomorphismus. Dann heißt $(A_n, \varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ eine <u>gerichtete Folge von C^*-Algebren</u>

Wir setzen: $\varphi_{n,n+k} : A_n \to A_{n+k}$ mit $\varphi_{n,n+k} = \varphi_{n+k-1} \cdots \varphi_{n+1} \varphi_n$

Problem: können wir $\lim\limits_{n \to \infty} A_n$ als C^*-Algebra Sinn geben?

9.5 Satz: Sei $(A_n, \varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ eine gerichtete Folge von C^*-Algebren. Dann ist

$$\prod_{k=1}^{\infty} A_k := \{ (a_k)_{k=1}^{\infty} \mid a_k \in A_k \}$$

mit punktweise definierten Operationen eine $*$-Algebra.

Sei $A' \subset \prod_{k=1}^{\infty} A_k$ definiert gemäß

$$A' := \{ a = (a_k)_{k=1}^{\infty} \mid \exists N \in \mathbb{N} : \quad a_{k+1} = \varphi_k(a_k) \quad \forall k \geq N \}.$$

Dann ist A' eine $*$-Unteralgebra von $\prod_{k=1}^{\infty} A_k$ und

$$p(a) := \lim_{k \to \infty} \|a_k\| \qquad \text{für } a = (a_k)_{k=1}^{\infty} \in A'$$

definiert eine C^*-Halbnorm auf A'.

9.6 Def.: Die einhüllende C^*-Algebra A von (A', p) nennen wir den <u>gerichteten Limes</u> von $(A_n, \varphi_n)_{n=1}^{\infty}$.

Notation: $A = \varinjlim (A_n, \varphi_n) \quad (= \varinjlim A_n)$

<u>Beweis:</u> $\prod_{k=1}^{\infty} A_k$, A' $*$-Algebren: klar

Sei $a = (a_k) \in A' \Rightarrow a_{k+1} = \varphi_k(a_k)$ für k hinr. groß

φ_k $*$-Homom. $\Rightarrow \|a_{k+1}\| \leq \|a_k\|$

$\Rightarrow p(a) = \lim_{k \to \infty} \|a_k\|$ existiert

p C^*-Halb-Norm: nachrechnen!

$$\Big(p(aa^*) = \lim_{k \to \infty} \underbrace{\|a_k a_k^*\|}_{\|a_k\|^2} \qquad a = (a_k)$$

$$= p(a)^2 \Big)$$

9.7 Lemma: Für $a \in A_n$ setzen wir

$$\hat{\varphi}^n(a) = (0, \dots, 0, a, \varphi_n(a), \dots, \varphi_{n,n+k}(a), \dots) \in A'$$

und

$$\varphi^n : A_n \to A = \varinjlim A_n$$
$$a \mapsto i(\hat{\varphi}^n(a))$$

wobei $i : A' \to A$ die kanonische Einbettung ist.
Dann sind die φ^n $*$-Homomorphismen und für alle n kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A_n \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[dr, "\varphi^n"'] & A_{n+1} \arrow[d, "\varphi^{n+1}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Die Folge $(\varphi^n(A_n))_n$ bildet eine aufsteigende Folge von C^*-Unteralgebren, deren Vereinigung dicht in A ist. Es gilt:

$$\| \varphi^n(a) \| = \lim_{k \to \infty} \| \varphi_{n,n+k}(a) \|$$

Sind alle φ_n injektiv, so auch die φ^n, d.h. dann ist $\varphi^n : A_n \to A$ isometrische Einbettung.

__Beweis__: alles trivial $\rightsquigarrow$ Nachrechnen

9.8. Satz: Sei A der gerichtete Limes von $(A_n, \varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ mit den kanonischen Abb. $\varphi^n : A_n \to A$.

1) Sei $a \in A_n$, $b = A_m$ mit $\varphi^n(a) = \varphi^m(b)$. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $k \geq n, m$, so daß

$$\| \varphi_{n,k}(a) - \varphi_{m,k}(b) \| < \varepsilon$$

$$\begin{array}{r}
(\ldots, a, \varphi_{n,n+1}(a), \ldots, \varphi_{n,m}(a), \varphi_{n,m+1}(a), \ldots, \varphi_{n,k}(a), \ldots) \rightsquigarrow \varphi^n(a) \\
\| \\
(\ldots, 0, \ldots, b, \varphi_{m,m+1}(b), \ldots, \varphi_{n,k}(b), \ldots) \rightsquigarrow \varphi^n(b)
\end{array}$$

2) Sei B eine C^*-Algebra und $\psi^n : A_n \to B$ ein $*$-Homomorphismus für jedes $n \in \mathbb{N}$, so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A_n \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[dr, "\psi^n"'] & A_{n+1} \arrow[d, "\psi^{n+1}"] \\
& B
\end{tikzcd}$$

kommutiert, dann gibt es einen eindeutig bestimmten $*$-Homomorphismus $\Psi : A \to B$, so daß für alle n das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A_n \arrow[r, "\varphi^n"] \arrow[dr, "\psi^n"'] & A \arrow[d, "\Psi"] \\
& B
\end{tikzcd}$$

kommutiert

Beweis: 1) Sei $n \leq m \Rightarrow \varphi_{n,m}(a), b \in A_m$

und $\varphi^m(\varphi_{n,m}(a)) = \varphi^n(a) = \varphi^m(b)$

$$\Rightarrow 0 = \|\varphi^m(\varphi_{n,m}(a) - b)\| = \lim_{k\to\infty} \|\varphi_{m,m+k}(\varphi_{n,m}(a) - b)\|$$

$$\Rightarrow \exists\, k \geq n,m : \quad \|\underbrace{\varphi_{m,m+k}(\varphi_{n,m}(a))}_{\varphi_{n,m+k}(a)} - \varphi_{m,m+k}(b)\| < \varepsilon$$

2) Idee: Für Elemente der Form $\varphi^n(a)$ setze

$$\psi(\varphi^n(a)) = \psi^n(a)$$

wohldefiniert: Sei $\varphi^n(a) = \varphi^m(b)$

$$\overset{1)}{\Longrightarrow} \exists\, k \geq n,m : \quad \|\varphi_{n,k}(a) - \varphi_{m,k}(b)\| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \|\psi^n(a) - \psi^m(b)\| = \|\psi^k(\varphi_{n,k}(a) - \varphi_{m,k}(b))\|$$

$$\leq \|\varphi_{n,k}(a) - \varphi_{m,k}(b)\|$$

$$< \varepsilon$$

$$\varepsilon \to 0 \Rightarrow \psi^n(a) = \psi^m(b)$$

Somit ψ auf $G := \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi^n(A) \subset A$ wohldef.

ψ $*$-Homomorphismus: klar

ψ $\|\cdot\|$-verringernd:

$$\|\psi(\varphi^n(a))\| = \|\psi^n(a)\| = \|\psi^{n+k}\varphi_{n,n+k}(a)\| \leq \|\varphi_{n,n+k}(a)\| \quad \forall k$$

$$\Rightarrow \|\psi(\varphi^n(a))\| \leq \lim_{n\to\infty} \|\varphi_{n,n+k}(a)\| = \|\varphi^n(a)\|$$

also Ψ stetig auf $\mathcal{C}$

$\Rightarrow$ kann zu $*$-Homomorphismus auf $\overline{\mathcal{C}} = A$ fortgesetzt werden, also

$$\Psi : A \to B \qquad \text{und} \quad \Psi \varphi^n = \Psi^n \quad \forall n$$

Eindeutigkeit von Ψ klar, da $\mathcal{C}$ dicht in A $\square$

<u>9.9. Bem.</u>: 1) Sind alle φ_n und Ψ^n injektiv, so gilt dies auch für Ψ.

2) Der wichtigste Spezialfall der $\varinjlim$-Konstruktion ist der, wo alle $\varphi_n : A_n \to A_{n+1}$ Inklusionen sind:

Sei B eine C^*-Algebra und $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ eine aufsteigende Folge von C^*-Unteralgebren von B, deren Vereinigung dicht in B ist. Dann ist mit

$\varphi_n : A_n \to A_{n+1}$ Inklusion

$$B \cong \varinjlim (A_n, \varphi_n)$$

<u>Beweis</u>: Sei $\Psi_n : A_n \to B$ Inklusion

$$\overset{9.8.}{\Longrightarrow} \exists\, \Psi : \varinjlim (A_n, \varphi_n) \to B$$

φ_n, Ψ_n injektiv $\Rightarrow$ Ψ injektiv, d.h.

$$\varinjlim (A_n, \varphi_n) \cong \Psi(\varinjlim (A_n, \varphi_n)) = B,$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \Psi(A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ dicht in } B.$$

<u>9.10. Satz:</u> Sei B eine C^*-Algebra und $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ eine aufsteigende Folge von C^*-Unteralgebren von B, deren Vereinigung dicht in B ist. Falls alle A_n einfach sind, so ist auch B einfach.

<u>Beweis:</u> Sei I nicht-triviales alg. Ideal in B

$\Rightarrow \varphi: B \to B/I$ nicht injektiv

Wir zeigen: $\left.\begin{array}{l}\varphi: B \to C \quad *\text{-Homom.}\\ C \quad C^*\text{-Algebra}\\ \varphi \not\equiv 0\end{array}\right\} \Rightarrow \varphi$ injektiv

Sei $\varphi_n := \varphi|A_n$

$\Rightarrow \ker \varphi_n$ alg. Ideal in A_n

A_n einfach $\Rightarrow \varphi_n \equiv 0$ oder φ_n injektiv, d.h. isometrisch

Falls ein $\varphi_n \equiv 0 \Rightarrow$ alle $\varphi_n \equiv 0$

$$\Rightarrow \varphi | \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \equiv 0$$

$$\Rightarrow \varphi \equiv 0$$

also: alle φ_n isometrisch

$\Rightarrow \varphi | \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ isometrisch

$\Rightarrow \varphi$ isometrisch, d.h. injektiv

$\square$

<u>9.11. Folgerung</u>: Sei $A = \varinjlim (A_n, \varphi_n)_{n=1}^{\infty}$. Falls alle A_n einfach sind, so gilt dies auch für A.

<u>Beweis</u>: Sei $\varphi^n : A_n \to A$ die kanonische Abbildung. Dann ist $(\varphi^n(A_n))_{n=1}^{\infty}$ aufsteigende Familie von einfachen C^*-Unteralgebren von A, deren Vereinigung dicht in A ist.

9.10. $\Rightarrow$ A einfach □

<u>9.12. Def.</u>: Sei A eine C^*-Algebra.

1) Ein Zustand $\tau : A \to \mathbb{C}$ heißt <u>Spur</u>, falls

$$\tau(ab) = \tau(ba) \qquad \forall a, b \in A$$

2) Gibt es genau eine Spur auf A, so sagen wir: A <u>besitzt eindeutige Spur</u>.

<u>9.13. Satz</u>: Sei B eine C^*-Algebra mit Eins und $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ eine aufsteigende Folge von C^*-Unteralgebren von B mit $1 \in A_n$ für alle n und

$$B = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}.$$

Falls jedes A_n eine eindeutige Spur besitzt, so gilt dies auch für B.

<u>Beweis</u>: Sei τ_n eindeutige Spur auf A_n

Da $\tau_{n+1}|A_n$ Spur (Zustand, da $\tau_{n+1}(1) = 1$)

$\overset{\text{Eind}}{\Longrightarrow}$ $\tau_{n+1}|A_n = \tau_n$

Definiere τ auf $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ durch $\tau(a) = \tau_n(a)$ für $a \in A_n$

$\Rightarrow$ $\tau : \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \to \mathbb{C}$ linear und stetig, da

$$|\tau(a)| = |\tau_n(a)| \underset{\|\tau_n\| = 1}{\underset{\uparrow}{\leq}} \|a\| \quad \text{für } a \in A_n$$

$\Rightarrow$ τ kann eindeutig auf $\overline{\bigcup A_n} = B$ fortgesetzt werden

und τ Spur auf B

Eindeutigkeit von τ: klar, da $\tau|A_n = \tau_n$ eindeutig

$\square$