

10 UHF - Algebren

10-1

10.1 Def.: Eine UHF (uniformly hyperfinite) Algebra ist eine unital C^* -Algebra A , so daß eine aufsteigende Folge $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ von endlich-dimensionalen einfachen C^* -Algebren mit $1 \in A_n$ (für alle n) existiert mit

$$A = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}$$

10.2 Satz: Eine UHF-Algebra ist einfach und besitzt eindeutige Spur.

Beweis: alle A_n einfach $\stackrel{9.10}{\Rightarrow} A$ einfach

A_n einfach, endlich-dim. $\stackrel{7.3}{\Rightarrow} A_n \cong M_k(\mathbb{C})$ für ein $k \in \mathbb{N}$

aber alle $M_k(\mathbb{C})$ besitzen eindeutige Spur $\Rightarrow A$ besitzt eindeutige Spur

Existenz: $\text{tr}: M_k(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$

$$(\lambda_{ij})_{i,j=1}^k \mapsto \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \lambda_{ii}$$

Eindeutigkeit: Sei τ Spur auf M_k und p, q min Projektionen

$$\Rightarrow p \sim q \quad \text{d.h.} \quad p = uu^* \quad \text{und} \quad q = u^*u$$

$$\Rightarrow \tau(p) = \tau(uu^*) = \tau(u^*u) = \tau(q)$$

Seien p_i minimale Projektionen mit $\sum_{i=1}^k p_i = 1$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^k \tau(p_i) = \tau(1) = 1$$

$$\Rightarrow \tau(p) = \frac{1}{k} \quad \text{für alle minimalen Projektionen}$$

minimale Projektionen erzeugen $M_k(\mathbb{C})$ linear

$$\Rightarrow \tau \text{ auf } M_k(\mathbb{C}) \text{ eindeutig bestimmt}$$

□

10.3. Bem.: Jedes $A_n \cong M_{k(n)}$ und gemäß ...

hängt die Einbettung $A_n \rightarrow A_{n+1}$ nur von der Multiplizität ab, d.h. bis auf unitäre Äquivalenz gilt:

$$A_n \cong M_{k(n)} \rightarrow M_{k(n+1)} \cong A_{n+1} \quad \text{wobei } k(n+1) = d \cdot k(n)$$

$$a \mapsto \begin{pmatrix} a & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a \end{pmatrix}$$

Somit sind die UHF-Algebren durch die Multiplizitäten aller Einbettungen bestimmt.

10.4. Notation: 1) Für jede Folge $s := (s(1), s(2), \dots)$ mit $s(i) \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (für alle $i=1, 2, \dots$) setzen wir

$$s!(n) := s(1)s(2)\dots s(n) \quad (n \geq 1)$$

Sei $\varphi_n : M_{s!(n)}(\mathbb{C}) \rightarrow M_{s!(n+1)}$ die kan. Einbettung und M_s die UHF-Algebra.

$$M_s := \varinjlim (M_{s!(n)}(\mathbb{C}), \varphi_n)_{n=1}^{\infty}$$

2) Für Folge s wie oben definieren wir die Fkt

$$E_s : \text{Primzahlen} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

$$r \mapsto E_s(r)$$

mit

$$E_s(r) := \sup \{m \in \mathbb{N} \mid r^m \text{ teilt ein } s!(n)\}$$

3) Wir schreiben auch

$$E_s \hat{=} 2^{E_s(2)} \cdot 3^{E_s(3)} \cdot 5^{E_s(5)} \dots$$

und nennen es eine supernaturalische Zahl.

10.5. Beispiel: 1) $s_1 = (1, 2, 2, 2, 2, \dots)$ ergibt

$$M_1 \subset M_2 \subset M_4 \subset M_8 \subset \dots \subset M_{s_1}$$

$$\varepsilon_{s_1} = 2^\infty$$

$$s_2 = (1, 4, 2, 4, \dots)$$

$$M_1 \subset M_4 \subset M_8 \subset M_{32} \subset \dots \subset M_{s_2}$$

$$\varepsilon_{s_2} = 2^\infty = \varepsilon_{s_1}$$

2) $s = (1, 2, 3, 5, 7, \dots)$

$$M_1 \subset M_2 \subset M_6 \subset M_{30} \subset \dots \subset M_s$$

$$\varepsilon_s = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots$$

3) $\varepsilon = 2^\infty \cdot 3^\infty \cdot 5$ entspricht z.B.

$$M_3 \subset M_{15} \subset M_{30} \subset M_{60} \subset M_{180} \subset \dots$$

4) $M_2 \subset M_6 \subset M_{12} \subset M_{24} \subset M_{120} \subset \dots$

10.6. Satz: Seien s, s' zwei Folgen gemäß 10.4. mit ungleichen UHF-Algebren $M_s, M_{s'}$. Dann gilt:

$$M_s \cong M_{s'} \Rightarrow \varepsilon_s = \varepsilon_{s'}$$

10.7. Bem.: 1) Da es überabzählbar viele verschiedene Folgen ε_s gibt, gibt es also auch überabzählbar viele UHF-Algebren, welche paarweise nicht-isomorph sind.

2) Es gilt sogar die Umkehrung von 10.6, also:

$$M_S \cong M_{S'} \iff \varepsilon_S = \varepsilon_{S'}$$

Alle diese Resultate gehen auf Glimm (1960) zurück.

Beweis: Sei $\pi: M_S \rightarrow M_{S'}$ *-Isomorphismus

Seien τ, τ' die eindeutigen Pseue von $M_S, M_{S'}$ (nach 10.2.)

$$\tau' \pi: M_S \xrightarrow{\pi} M_{S'} \xrightarrow{\tau'} \mathbb{C} \quad \text{ist Pseu auf } M_S$$

$$\Rightarrow \tau' \pi = \tau$$

$$\varphi^n: M_{S'(n)} \rightarrow M_S$$

$$\psi^n: M_{S'(n)} \rightarrow M_{S'}$$

sind die kanonischen Einbettungen

Idee:

$$\begin{array}{ccc} M_{S'(n)} & & M_{S'(n)} \\ \cap & & \cap \\ \vdots & & \vdots \\ M_{S'(n)} & \ni p \xrightarrow{\pi} \pi(p) \sim q \in & M_{S'(n)} \\ \cap & \text{minimale} & \cap \\ \vdots & \text{Projektion} & \vdots \\ \cap & & \cap \\ M_S & & M_{S'} \end{array}$$

$$\Rightarrow \tau'(q) = \tau(p)$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $p \in M_{S'(n)}$ Rang 1 (=minimale) Projektion

$$\tau p^n: M_{S'(n)} \xrightarrow{p^n} M_S \xrightarrow{\tau} \mathbb{C} \quad \text{ist eindeutige Pseu auf } M_{S'(n)}$$

$$\Rightarrow \tau(p^n(p)) = \frac{1}{s'(n)} \quad \text{vgl. Beweis von 10.2)}$$

$\pi(p^n cp)$ ist Projektion in $M_{S'}$

Da $\bigcup_m M_{S'(cm)}$ dicht in $M_{S'}$

$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}$ und selbstadj. $a \in M_{S'(cm)}$ mit

$$\|\pi(p^n cp) - \psi^m(ca)\| < \frac{1}{8}$$

und

$$\|\pi(p^n cp) - \psi^m(ca^2)\| < \frac{1}{8}$$

(beachte: $\|p^2 - a^2\| = \|p(p-a) + (p-a)a\| \leq \|p-a\| + \|p-a\|\|a\|$

$\rightarrow 0$ falls $a \rightarrow p$)

$$\Rightarrow \|a - a^2\| = \|\psi^m(ca) - \psi^m(ca^2)\|$$

$$\leq \|\psi^m(ca) - \pi(p^n cp)\| + \|\pi(p^n cp) - \psi^m(ca^2)\|$$

$$< \frac{1}{4}$$

"Deformiere" a zu Projektion

L 10.8 $\Rightarrow \exists q \in M_{S'(cm)}$ Projektion mit $\|a - q\| < \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \|\pi(p^n cp) - \psi^m(q)\| \leq \underbrace{\|\pi(p^n cp) - \psi^m(ca)\|}_{< \frac{1}{8}} + \underbrace{\|\psi^m(ca) - \psi^m(q)\|}_{< \frac{1}{2}}$$

$$< 1$$

also: Projektionen $\pi(p^n cp)$ und $\psi^m(q)$ "sehr" nahe

L 10.9 $\Rightarrow \pi(p^n cp) \sim \psi^m(q)$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \tau'(\Psi^m(q)) &= \tau'(\pi(p^m \cdot p)) \\
 &= \tau(p^m \cdot p) \\
 &= \frac{1}{s'(m)}
 \end{aligned}$$

$\tau' \Psi^m$ eindeutige Spur auf $M_{s'(m)}$

$$\Rightarrow \tau' \Psi^m(q) = \frac{d}{s'(m)} \quad \text{für } d \in \mathbb{N}$$

(rel. Wert kann nur Vielfaches des Werts auf min. Projektionen sein; beachte: q muß keine minimale Projektion sein)

$$\Rightarrow \frac{d}{s'(m)} = \frac{1}{s'(n)} \quad \Rightarrow \quad s'(m) = d \cdot s'(n)$$

d.h. $s'(n)$ teilt $s'(m)$

$$\Rightarrow \varepsilon_s \leq \varepsilon_{s'}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Symmetrie } s \leftrightarrow s' \Rightarrow \varepsilon_{s'} \leq \varepsilon_s \end{array} \right\} \Rightarrow \varepsilon_s = \varepsilon_{s'}$$

□

10.8. Lemma: Sei a selbst-adjungiertes Element einer C^* -Algebra A mit $\|a - a^2\| < \frac{1}{4}$. Dann gibt es eine Projektion $q \in A$ mit $\|a - q\| < \frac{1}{2}$

Beweis: konstruiere q in $C^*(a) \cong C_0(\Omega)$ Ω lokal kompakt

$$\|a - a^2\| < \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \notin \text{ran } |a| \quad \Rightarrow \quad \sigma(a) = \underbrace{(\sigma(a) \cap (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))}_{=:\mathcal{S}} \cup \underbrace{(\sigma(a) \cap (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}))}_{=:\mathcal{S}^c}$$

Setze $q = 1_{\mathcal{S}}$ (siehe Th. 10.1 auf Ω)

10.9. Lemma: Seien p und q Projektionen in einer C^* -Algebra A mit $\|p - q\| < 1$. Dann ist $p \sim q$.

Beweis: Betrachte die C^* -Algebra

$$A_p := pAp \subset A \quad (p \text{ ist Eins für } A_p)$$

$$\|p - q\| < 1 \Rightarrow \|p - pqp\| < 1$$

d.h. pqp invertierbar in A_p , d.h.

$$\exists y \in A_p : y pqp = p$$

$$pqp \geq 0 \Rightarrow y \geq 0 \Rightarrow \exists x \in A_p \text{ mit } x^2 = y, x \text{ invertierbar}$$

$$\text{also: } x^2 pqp = p \Rightarrow x pqp x = p \quad (x \text{ invert.})$$

$$\text{Setze nun } u = qx \in A$$

$$\Rightarrow u^* u = xq x = x p q p x \quad (\text{da } x \in A_p \Rightarrow xp = px = x) \\ = p$$

$$\text{und } u u^* = q x^2 q$$

$$\text{noch z.z.: } q x^2 q = q$$

$$x^2 pqp = p \Rightarrow \underbrace{q x^2 p}_{= q x^2 q} p q = q p q$$

$$= q x^2 q q p q \quad (x^2 p = p)$$

$$\text{also: } (q x^2 q)(q p q) = q p q$$

$$q p q \text{ invertierbar in } A_q = q A q \quad (\text{analog zu } p q p \text{ in } A_p)$$

$$\Rightarrow q x^2 q = q \quad (q \text{ Eins für } A_q)$$

$$\text{also: } u^* u = p, \quad u u^* = q x^2 q = q \quad \Rightarrow p \sim q \quad \square$$

10.10. Satz 2: Sei A eine C^* -Algebra mit aufsteigende Folge von Unteralkgebren $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so dass gilt:

$$A = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}.$$

1) Seien $\tau_n: A_n \rightarrow \mathbb{C}$ Zustände auf A_n mit

$$\tau_{n+1}|_{A_n} = \tau_n.$$

Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Zustand τ auf A mit $\tau|_{A_n} = \tau_n$.

2) Sind die Zustände τ_n alle rein, so gilt dies auch für τ .

Beweis 1) Def. τ auf $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ durch

$$\tau(a) := \tau_n(a) \quad \text{für } a \in A_n \quad (\text{wohldefiniert nach Voraussetzung})$$

$\Rightarrow \tau$ linear, beschränkt

$$|\tau(a)| = |\tau_n(a)| \leq \|a\| \quad (\text{da } \|\tau_n\| = 1)$$

$\Rightarrow$ Es existiert eindeutige Fortsetzung von τ auf

$$\overline{\bigcup A_n} = A$$

τ auf $\bigcup A_n$ positiv $\Rightarrow \tau$ auf A positiv.

τ Zustand, da $\|\tau\| = 1$.

2) Sei S positives lineares Funktional mit

$$S \leq \tau$$

Setze $S_n := S|_{A_n}$

$$\Rightarrow S_n \in \tau_n \quad \text{und } S_n \text{ positives Fkt}$$

$$\stackrel{\tau_n \text{ rein}}{\Rightarrow} S_n = \lambda_n \tau_n$$

$$\text{Da } S_{n+1}|_{A_n} = S_n, \quad \tau_{n+1}|_{A_n} = \tau_n \quad \Rightarrow \lambda_n = \lambda_{n+1} =: \lambda$$

$$\Rightarrow S = \lambda \tau \quad \text{auf } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$\Rightarrow S = \lambda \tau \quad \text{auf } \overline{\bigcup A_n} = A$$

$$\Rightarrow \tau \text{ ist rein}$$

□

10.11. Notation: Sei nun s eine Folge gemäß 10.4. und M_s zugehörige UHF-Algebra, d.h.

$$M_{s(1)} \subset M_{s(1) s(2)} \subset M_{s(1) s(2) s(3)} \subset \dots \subset M_s$$

Für Folge $I = (i(1), i(2), \dots)$ mit $1 \leq i(k) \leq s(k)$ ($k \in \mathbb{N}$)

definieren wir rekursiv eine Folge von Zuständen

$$\tau_n^I : M_{s(n)} \rightarrow \mathbb{C}$$

durch

$$\tau_1^I : M_{s(1)} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$a = (a_{ij})_{i,j=1}^{s(1)} \mapsto \tau_1^I(a) := a_{i(1) i(1)}$$

$$\tau_2^I : M_{s(1) s(2)} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$a = (a_{ij})_{i,j=1}^{s(2)} \mapsto \tau_2^I(a) := \tau_1^I(a_{i(2) i(2)})$$

mit $a_{ij} \in M_{s(1)}$

usw.

d.h.

$$\tau_{n+1}^I : M_{S!(n+1)} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$a = (a_{ij})_{i,j=1}^{S(n+1)} \mapsto \tau_{n+1}^I(a) := \tau_n^I(a_{1(n+1)} \dots a_{S(n+1)})$$

mit $a_{ij} \in M_{S!(n+1)}$

Beachte: $\tau_{n+1}^I / M_{S!(n)} = \tau_n^I$, da

$$a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

und $\tau_{n+1}^I \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \tau_n^I(a)$ (unabh. von Wert von $i(n+1)$)

Somit existiert nach 10.10 eindeutiger Zustand

$$\tau^I : M_S \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \tau^I / M_{S!(n)} = \tau_n^I$$

beachte: alle τ_n^I sind rein (Kla!) $\stackrel{10.10}{\Rightarrow} \tau^I$ rein.

Jede Folge I liefert somit einen reinen Zustand τ^I auf M_S , also auch eine irreduzible Darstellung von M_S .

Frage: Wann sind diese unitär äquivalent.

Dann benutzen wir folgendes (tieferliegende!) Kriterium

10.12. Satz 2: Sei A C^* -Algebra mit 1 und τ_1, τ_2 zwei reine Zustände auf A . Dann sind äquivalent:

a) Die zu τ_1 und τ_2 gehörigen GNS-Darstellungen sind unitär äquivalent

b) Es gibt ein unitäres Element $u \in A$ mit

$$\tau_1(a) = \tau_2(u^* a u) \quad \forall a \in A$$

ohne
Beweis

10.13 Satz: Sei s Folge gemäß 10.4 und M_s zugehörige

10-11

UHF-Algebra. Für zwei Folgen

$$I = \{i(1), i(2), \dots\} \quad (1 \leq i(k) \leq s(k))$$

$$J = \{j(1), j(2), \dots\} \quad (1 \leq j(k) \leq s(k))$$

Betrachte gemäß 10.11. die reinen Zustände τ^I und τ^J mit zugehörigen GNS-Darstellungen π_I und π_J .
Dann sind äquivalent:

a) $\pi_I \sim \pi_J$

b) I und J stimmen fast überein, d.h.

$$i(k) = j(k) \quad \text{für alle bis auf endlich viele } k$$

Beweis: b) $\Rightarrow$ a) Sei n so groß, daß $i(k) = j(k) \quad \forall k \geq n$

$$\text{Betrachte } \tau_n^I := \tau^I|_{M_{s(n)}} \quad \text{und } \tau_n^J := \tau^J|_{M_{s(n)}}$$

$$\Rightarrow \tau_n^I, \tau_n^J \text{ reine Zustände}$$

Da $M_{s(n)}$ nur eine irreduzible Darstellung besitzt,

$$\stackrel{10.12}{\Rightarrow} \exists u \in M_{s(n)} \text{ mit } \tau_n^I(a) = \tau_n^J(u^* a u) \quad \forall a \in M_{s(n)}$$

$$\stackrel{10.11.}{\Rightarrow} \tau_{n+1}^I(a) = \tau_n^I(a_{i(n+1), i(n+1)}) \quad a = (a_{ij}), \quad a_{ij} \in M_{s(n)}$$

$$= \tau_n^J(u^* a_{i(n+1), i(n+1)} u)$$

$$= \tau_{n+1}^J(\underbrace{(u^* a_{ij} u)_{i,j=1}^{s(n+1)}})$$

$$\begin{pmatrix} u^* & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix} (a_{ij}) \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$$

$$= \tau_{n+1}^J(u^* a u)$$

$$\stackrel{\text{Ind.}}{\Rightarrow} \tau_{n+k}^I(a) = \tau_{n+k}^J(u^* a u)$$

$$\Rightarrow \tau^I = \tau^J(a^* a) \quad \text{auf} \quad \bigcup_{m=n}^{\infty} M_{s(m)},$$

$$\text{also auch auf } \overline{\bigcup_{m=n} M_{s(m)}} = M_s$$

$$\stackrel{10.12}{\Rightarrow} \pi_I \sim \pi_J$$

$$a) \Rightarrow b): \text{ Sei } \pi_I \sim \pi_J$$

$$\stackrel{10.12}{\Rightarrow} \exists u \in M_s \quad \text{mit} : \tau^I(a) = \tau^J(a^* a u) \quad \forall a \in M_s$$

Approximiere $u \in M_s$ durch $x \in M_{s(n)}$ für hinreichend großes n

$$\text{mit } \|u - x\| < \frac{1}{4}$$

Sei nun $i(k) \neq j(k)$ für ein $k > n$.

Betrachte $e \in M_{s(k)}$ der Form

$$e = (e_{ij})_{i,j=1}^{s(k)}, \quad e_{ij} \in M_{s(k-1)} \quad \text{mit} :$$

ein $e_{nn} = 1$, sonst $e_{ij} = 0$, so daß

$$\tau^I(e) = 1$$

$$\tau^J(e) = 0$$

$$e = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

$$x \in M_{s(n)} \hat{=} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \quad (\text{da } n < k)$$

$$\Rightarrow x^* e x \hat{=} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & x^* x & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{insbesondere } \tau^J(x^* e x) = 0$$

Es gilt:

$$1 > \tau^j((u^* - x^*)e u) + \tau^j(x^*e(u - x))$$

$$\text{da } (u^* - x^*)e u + x^*e(u - x) = u^*e u - x^*e x \quad \text{selbstadj.}$$

$$\text{und } \|(u^* - x^*)e u\| \leq \frac{1}{4}$$

$$\|x^*e(u - x)\| \leq \frac{1}{4} \|x^*\| \leq \frac{1}{4} (1 + \frac{1}{4}) = \frac{5}{16}$$

Somit:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 + \tau^j(x^*e x) \\ &> \tau^j((u^* - x^*)e u) + \tau^j(x^*e(u - x)) + \tau^j(x^*e x) \\ &= \tau^j(u^*e u) \\ &= \tau^I(e) \\ &= 1 \end{aligned} \quad \text{w.d.s.p.}$$

$$\Rightarrow i(k) = j(k) \quad \forall k > n$$

□

10.14 Folgerung: Jede unendlich-dimensionale UHF-Algebra besitzt überabzählbar viele irreduzible Darstellungen, welche paarweise nicht unitär äquivalent sind.

10.15 Bem. 11) Somit ist hier zu unterscheiden:

abstrakte C^* -Algebra $\leftrightarrow$ konkrete Darstellung

beachte: Ist A einfach und π irred. Darstellung

$$\Rightarrow \ker \pi = \{0\}, \quad \text{d.h. } \pi: A \rightarrow B(\mathcal{H}) \text{ injektiv}$$

somit $A \cong \pi(A)$ für jede irred. Darstellung π ,

d.h. jede Darstellung enthält alle Information über A ,
diese kann aber je nach Darstellung mehr oder weniger
explizit sein.

2) abstrakte C^* -Algebren liefern mathematischen Rahmen
zur Beschreibung der QM

Grundannahme der Quantentheorie:

physikalisches System $\cong C^*$ -Algebra A

Observablen $\cong$ selbstadjungierte Elemente
von A

Zustände $\cong$ Zustände auf A

elementare QM : $A \cong \mathcal{K}(\mathcal{H})$

Da $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ nur eine irreduzible Darstellung besitzt,
kann man konkret immer in dieser rechnen

Quantenfeldtheorie, statistische Theorie unendlich-großer Systeme

A ist i.a. C^* -Algebra mit vielen verschiedenen
Darstellungen; spezielle Realisierung ^{des phys. Systems} entspricht speziellen
Darstellungen; z.B. verschiedene Zeiten oder verschiedene
Temperaturen $\cong$ verschiedenen Darstellungen
sonst: Wahl einer speziellen Darstellung nicht universell möglich
verschiedene Darstellungen sind "so weit" voneinander entfernt,
z.B.: $\pi_0(A)$ sei kanonische Darstellung in WW dieser Theorie,
 $\pi_1(A)$ gelöre in WW
Renormierung $\cong$ Versuch π_1 in Darstellung π_0 zu konstruieren
 $\rightarrow$ Unendlichkeiten

10.16 Beispiel: CAR-Algebra

a_i seien Operatoren, die folgenden Relationen genügen

$$a_i a_j + a_j a_i = 0$$

$$\forall i, j = 1, 2, \dots$$

$$a_i a_j^* + a_j^* a_i = \delta_{ij}$$

Sei A die davon erzeugte C^* -Algebra

Man kann zeigen: Sind b_i andere Operatoren mit gleichen Relationen und B die von b_i erzeugte C^* -Algebra, so

— liefert $a_i \mapsto b_i$ einen $*$ -Isomorphismus $A \cong B$.

Somit gibt es eine eindeutige C^* -Algebra zu obigen

Relationen, diese heißt CAR-Algebra (canonical anticommuting relations). Es gilt

$$\text{CAR} \cong 2^\infty\text{-UHF Algebra}$$

vgl. Bratteli-Robinson,
Bd II, S.2.2.1

10.17 Bem: 1) UHF-Algebren $\cong$ ∞ -Tensorprodukten

— Sei $s = (s(1), s(2), \dots)$ und $M_{s(i)}$ zugehörige UHF-Algebra. Dann

$$M_{s(1)} = M_{s(1)}$$

$$\bigcap M_{s(1)s(2)} \cong M_{s(1)} \otimes M_{s(2)}$$

$\bigcap$

$$M_{s(1)s(2)s(3)} \cong M_{s(1)} \otimes M_{s(2)} \otimes M_{s(3)}$$

$\bigcap$

$\bigcap$

$\vdots$

$\vdots$

$\bigcap$

$\bigcap$

M_s

$\cong$

$$M_{s(1)} \otimes M_{s(2)} \otimes M_{s(3)} \otimes \dots$$

∞ -Tensorprodukt

M_S wirkt auf $\mathbb{C}^{s(1)} \otimes \mathbb{C}^{s(2)} \otimes \mathbb{C}^{s(3)} \otimes \dots$

Für $I = (i(1), i(2), \dots)$ ist der reine Zustand τ^I durch den Vektor

$$\xi^I = e_{i(1)} \otimes e_{i(2)} \otimes e_{i(3)} \otimes \dots$$

gegeben (e_i Vektor in $\mathbb{C}^r$ mit 1 an i -ter Stelle)

Somit $\pi^I \sim \pi^J$, falls ξ^I und ξ^J sich nur an endlich vielen Stellen unterscheiden.

2) Beispiel: $s = (2, 2, 2, \dots)$

$\Rightarrow M_S$ 2^∞ -UHF Algebra $\hat{=}$ CAR-Algebra

beschreibt unendlich viele Teilchen mit Spin $\pm \frac{1}{2}$

e_+, e_- Basis von $\mathbb{C}^2$

$$e_+ \hat{=} \text{Spin} + \frac{1}{2}$$

$$e_- \hat{=} \text{Spin} - \frac{1}{2}$$

$I \hat{=}$ Folge von + und -

Darstellung in τ^I beschreibt Situation ξ^I

(d.h. Teilchen 1 hat Spin $i(1)$
2 $i(2)$
:

und alles was durch Umklappen von endlich-vielen Spins daraus hervorgeht.

Unterschiede in ∞ -vielen Spins führen zu inäquivalenten Darstellungen.

Beachte: Alle Darstellungen τ^I sind physikalisch "Äquivalent", da ohne WW; das Problem ist die Konstruktion von Zuständen / Darstellungen, die WW beschreiben

10.18 Def: Eine AF (approximately finite) Algebra

ist eine C^* -Algebra A , welche eine aufsteigende Folge $(A_n)_{n=1}^\infty$ von endlich-dimensionalen C^* -Unteralgebren enthält, so daß

$$A = \overline{\bigcup_{n=1}^\infty A_n}.$$

10.19 Beispiel: $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ ist eine AF-Algebra (nicht-unital für $\dim \mathcal{H} = \infty$)

denn: Sei $(e_i)_{i=1}^\infty$ ONB von $\mathcal{H}$

Sei p_n die Projektion auf den von $e_1, \dots, e_n$ aufgespannten Unter- $\mathcal{H}$

(p_n) approximierende Eins für $\mathcal{K}(\mathcal{H})$

$$\Rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{H}) = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} p_n \mathcal{K}(\mathcal{H}) p_n}$$

$p_n \mathcal{K}(\mathcal{H}) p_n$ endlich-dimensional ($\subseteq M_n(\mathbb{C})$)

Somit: $M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \dots \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$

$\uparrow \quad \nearrow$

keine unitalen Einbettungen!

$$M_n \rightarrow M_{n+1}$$

$$a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

10.20 Notation: $A_n \cong M_{k(n)} \oplus \dots \oplus M_{k(n)}$

10-18

$$A_{n+1} \cong M_{m(n)} \oplus \dots \oplus M_{m(n)}$$

Betrachte trivialen Fall, d.h. $1 \in A_i \forall i$

$\Rightarrow A_n \rightarrow A_{n+1}$ nicht-entartete Darstellung von A_n

kann also bis auf unitäre Äquivalenz dadurch beschrieben werden, wie oft jedes $M_{k(i)}$ in jedes $M_{m(j)}$ eingebettet wird.

Dies kann durch eine $r \times p$ -Matrix $(a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, r \\ j=1, \dots, p}}$ mit $a_{ij} \in \mathbb{N}_0$ ("partielle Multiplizitäten")

beschrieben werden oder graphisch durch sogenannte

Bratteli-Diagramme.

Beispiel: $M_2 \oplus M_3 \rightarrow M_4 \oplus M_5$

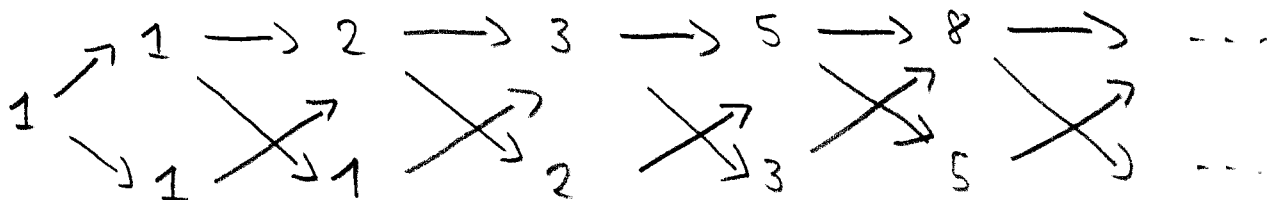
$$a \oplus b \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

entspricht Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

bzw. Bratteli-Diagramm



Beispiel für AF-Algebra (mit gleicher Einbettung auf jeder Stufe)



beachte: UHF-Algebren können auch so dargestellt werden, z.B. ¹⁰⁻¹

2^∞ -UHF-Algebra:

$$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 4 \Rightarrow 8 \Rightarrow 16 \Rightarrow \dots$$

Verschiedene Bratteli-Diagramme können zu gleichen AF-Algebren gehören, man kann also eine entsprechende Äquivalenzrelation auf den Bratteli-Diagrammen einführen, die dem entspricht.

Charakterisierung von AF-Algebren:

Bratteli 1972

Elliott 1976