

11. Tensorprodukte von G^* -Algebren

11.1. Notation: Seien H, K Vektorräume. Dann bezeichnet

$H \otimes K$ das algebraische Tensorprodukt von H und K , d.h.

$$H \otimes K = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \mid n \in \mathbb{N}, x_i \in H, y_i \in K \right\}$$

11.2. Bem.: 1) $H \otimes K$ wird VR mit kanonischen Operationen

2) $\otimes$: bilineare Abb $\leadsto$ lineare Abb

— Seien H, K, L VR und

$p: H \times K \rightarrow L$ bilineare Abb.

$\Rightarrow$ Eindeutige lineare Abb.

$$p': H \otimes K \rightarrow L$$

mit

$$p'(x \otimes y) = p(x, y) \quad \forall x \in H, y \in K$$

— 3) Seien

$$\tau: H \rightarrow \mathbb{C}$$

$$s: K \rightarrow \mathbb{C}$$

lineare Funktionale

$\Rightarrow$ $\exists$ eindeutiges lineares Fkt

$$\tau \otimes s: H \otimes K \rightarrow \mathbb{C}$$

mit

$$\tau \otimes s(x \otimes y) = \tau(x) s(y)$$

(da $(x, y) \mapsto \tau(x) s(y)$ bilinear)

$$4) \left. \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i = 0 \\ y_1, \dots, y_n \text{ linear} \\ \text{unabhängig} \end{array} \right\} \Rightarrow x_1, \dots, x_n = 0$$

denn: $\exists$ lineare Fktn $S_j: K \rightarrow \Phi$ mit $S_j(y_i) = \delta_{ij}$

Sei $\tau: H \rightarrow \Phi$ linear

$$\Rightarrow 0 = (\tau \otimes S_j) \left(\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n \tau(x_i) S_j(y_i)$$

$$= \tau(x_j)$$

$$\Rightarrow \tau(x_j) = 0 \quad \forall \tau$$

$$\Rightarrow x_j = 0 \quad \forall j$$

$$5) \quad \begin{array}{l} \mu: H \rightarrow H' \\ \nu: K \rightarrow K' \end{array} \quad \text{lineare Abb zwischen UR}$$

$\Rightarrow \exists$ eindeutige lin. Abb

$$\mu \otimes \nu: H \otimes K \rightarrow H' \otimes K'$$

mit

$$\mu \otimes \nu (\xi \otimes \eta) = \mu(\xi) \otimes \nu(\eta) \quad \forall \xi \in H, \eta \in K$$

11.3. Satz: Seien H und K Hilberträume. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes inneres Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $H \otimes K$ mit

$$\langle \xi_1 \otimes \eta_1, \xi_2 \otimes \eta_2 \rangle = \langle \xi_1, \xi_2 \rangle \cdot \langle \eta_1, \eta_2 \rangle$$

$$\forall \xi_1, \xi_2 \in H, \eta_1, \eta_2 \in K$$

Beweis: klar

11.4. Notation: Die Vervollständigung von $H \otimes K$ bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichnen wir mit $H \hat{\otimes} K$, Hilbert-Raum Tensorprodukt von H und K

11.5. Lemma: Seien H, K Hilberträume und $x \in B(H), y \in B(K)$.

Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Operator $x \hat{\otimes} y \in B(H \hat{\otimes} K)$ mit

$$x \hat{\otimes} y (\xi \otimes \eta) = x(\xi) \otimes y(\eta) \quad \forall \xi \in H, \eta \in K$$

Außerdem gilt:

$$\|x \hat{\otimes} y\| = \|x\| \|y\|$$

Beweis: Lineare Algebra $\Rightarrow \exists x \otimes y: H \otimes K \rightarrow H \otimes K$

1. Fall: x, y seien unitär

Betrachte: $S = \sum \xi_i \otimes \eta_i$

$$\begin{aligned} \|x \otimes y (S)\|^2 &= \sum_{i,j} \underbrace{\langle x \otimes y (\xi_i \otimes \eta_i), x \otimes y (\xi_j \otimes \eta_j) \rangle}_{x(\xi_i) \otimes y(\eta_i) \quad x(\xi_j) \otimes y(\eta_j)} \\ &= \sum_{i,j} \langle x(\xi_i), x(\xi_j) \rangle \cdot \langle y(\eta_i), y(\eta_j) \rangle \\ &\stackrel{x, y \text{ unitär}}{=} \sum_{i,j} \langle \xi_i, \xi_j \rangle \cdot \langle \eta_i, \eta_j \rangle \end{aligned}$$

$$= \left\langle \sum_i \xi_i \otimes \eta_i, \sum_j \xi_j \otimes \eta_j \right\rangle$$

$$= \|\xi\|^2$$

$$\Rightarrow \|x \otimes y\| = 1$$

$\Rightarrow x \otimes y$ kann zu $x \hat{\otimes} y$ auf $H \hat{\otimes} K$ ausgedehnt werden

2. Fall: allgemeiner beschränkter Operator kann als Summe von unitären Operatoren geschrieben werden

$\Rightarrow x \otimes y$ beschränkt auf $H \otimes K$

$\Rightarrow x \hat{\otimes} y$ existiert auf $H \hat{\otimes} K$

nach 2.2: $\|x \hat{\otimes} y\| = \|x\| \|y\|$

beachte: $B(H) \rightarrow B(H \hat{\otimes} K)$, $B(K) \rightarrow B(H \hat{\otimes} K)$

$$x \mapsto x \hat{\otimes} 1 \quad y \mapsto 1 \hat{\otimes} y$$

sind injektive *-Homomorph., also isometrisch

$$\Rightarrow \|x \hat{\otimes} 1\| = \|x\|, \quad \|1 \hat{\otimes} y\| = \|y\|$$

und

$$\|x \hat{\otimes} y\| = \|(x \hat{\otimes} 1)(1 \hat{\otimes} y)\| \leq \|x \hat{\otimes} 1\| \|1 \hat{\otimes} y\| = \|x\| \|y\|$$

Für $\varepsilon > 0$ seien ξ, η Vektoren mit $\|\xi\| = \|\eta\| = 1$, so daß

$$\|x\xi\| > \|x\| - \varepsilon > 0, \quad \|y\eta\| > \|y\| - \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow \|x \hat{\otimes} y (\xi \otimes \eta)\| = \|x\xi \otimes y\eta\|$$

$$= \|x\xi\| \cdot \|y\eta\|$$

$$> (\|x\| - \varepsilon)(\|y\| - \varepsilon)$$

$$\Rightarrow \|x \hat{\otimes} y\| \geq \underbrace{\|x \hat{\otimes} y (\xi \otimes \eta)\|}_{\substack{\sup \\ \|\xi\| = \|\eta\| = 1}} \geq \|x\| \cdot \|y\|$$

$\uparrow$
 $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\text{also: } \|x \hat{\otimes} y\| = \|x\| \|y\|$$

□

11.6 Bem.: 1) Es gilt:

$$(x \hat{\otimes} y)(x' \hat{\otimes} y') = (xx' \hat{\otimes} yy')$$

$$(x \hat{\otimes} y)^* = x^* \hat{\otimes} y^*$$

$$\left. \begin{array}{l} 2) \sum_{i=1}^n x_i \hat{\otimes} y_i = 0 \\ y_1, \dots, y_n \text{ linear} \\ \text{unabh.} \end{array} \right\} \Rightarrow x_1 = \dots = x_n = 0$$

11.7. Lemma: A und B seien Algebren.

1) $A \otimes B$ wird zu Algebra mit

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') := aa' \otimes bb'$$

2) Sind A, B *-Algebren, so wird $A \otimes B$ zu *-Algebra mit

$$(a \otimes b)^* := a^* \otimes b^*$$

Beweis: zinniges Problem: Wahldef. der Mult. und Invol.

1) Sei L_a lineare Abb.

$$L_a : A \rightarrow A$$

$$a' \mapsto aa'$$

$$L_b : B \rightarrow B$$

$$b' \mapsto bb'$$

$$\Rightarrow L_a \otimes L_b : A \otimes B \rightarrow A \otimes B \quad \text{lin. Abb.} \quad \forall a \in A, b \in B$$

Sei X VR aller linearen Abb. auf $A \otimes B$,

also $L_a \otimes L_b \in X$

Betrachte

$$A \times B \rightarrow X$$

bilineare Abb.

$$(a, b) \mapsto L_a \otimes L_b$$

$\Rightarrow \exists$ eind. $M: A \otimes B \rightarrow X$ mit

$$M(a \otimes b) = L_a \otimes L_b$$

$$\Rightarrow (a \otimes b)(a' \otimes b') = M(a \otimes b) a' \otimes b'$$

wohl definiert!

$$2) \text{ z.z.: } \sum_{j=1}^n a_j \otimes b_j = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n a_j^* \otimes b_j^* = 0$$

Übungsaufgabe

□

11.8. Bezeichnung: $A \otimes B$ versehen mit Operationen gemäß 11.7. heißt $(*)$ -Algebra Tensorprodukt von A und B .

Problem: A, B normiert $\rightsquigarrow$ Norm auf $A \otimes B$ ²

insbesondere: A, B C_1^* -Alg. $\rightsquigarrow$ C_1^* -Norm auf $A \otimes B$

nicht eindeutig möglich i.a.

$\rightsquigarrow$ Es gibt verschiedene Tensorprodukte von C_1^* -Algebren (oder auch von Banachräumen)