11.9. Bem: 1) Seien $\varphi: A \to C$ und $\psi: B \to C$ $*$-Homomorphismen zwischen $*$-Algebren A, B, C, so daß $\varphi(A)$ mit $\psi(B)$ vertauscht, d.h.

$$\varphi(a)\psi(b) = \psi(b)\varphi(a) \qquad \forall a \in A, b \in B$$

Dann existiert genau ein $*$-Homomorphismus

$\pi: A \otimes B \to C$ mit

$$\pi(a \otimes b) = \varphi(a)\psi(b) \qquad \forall a \in A, b \in B$$

denn: $A \times B \to C$ bilinear

$(a,b) \mapsto \varphi(a)\psi(b)$

$\Rightarrow \exists \pi$

π Homom: $\pi(\underbrace{(a\otimes b)(a'\otimes b')}_{aa'\otimes bb'}) = \varphi(aa')\psi(bb')$

$$= \varphi(a)\underbrace{\varphi(a')\psi(b)}_{\psi(b)\varphi(a')}\psi(b')$$

$$= \pi(a\otimes b)\pi(a'\otimes b')$$

π $*$-Homo: $\pi((a\otimes b)^*) = \pi(a^*\otimes b^*)$

$$= \varphi(a^*)\psi(b^*)$$

$$= \varphi(a)^*\psi(b)^*$$

$$= (\varphi(a)\psi(b))^*$$

$$= (\pi(a\otimes b))^*$$

2) $\varphi : A \to A'$, $\psi : B \to B'$ seien

$*$-Homomorphismen zwischen $*$-Algebren

$\Rightarrow \varphi \otimes \psi : A \otimes B \to A' \otimes B'$ $*$-Homomorphismus

<u>11.10. Satz:</u> Seien

$\varphi : A \to B(H)$

$\psi : B \to B(K)$

Darstellungen der C^*-Algebren A und B.

Dann existiert genau ein $*$-Homomorphismus

$\pi : A \otimes B \to B(H \hat{\otimes} K)$ mit

$\pi(a \otimes b) = \varphi(a) \hat{\otimes} \psi(b) \quad \forall\, a \in A,\ b \in B$

Sind φ, ψ injektiv, so auch π.

<u>11.11. Notation:</u> Wir bezeichnen π auch mit

$\pi = \varphi \hat{\otimes} \psi$

<u>Beweis:</u> Betrachte

$\varphi' : A \to B(H \hat{\otimes} K)$ $\qquad$ $\psi' : B \to B(H \hat{\otimes} K)$

$\quad a \mapsto \varphi(a) \hat{\otimes} 1$ $\qquad$ $b \mapsto 1 \hat{\otimes} \psi(b)$

$\Rightarrow \varphi', \psi'$ $*$-Homo und $\varphi'(A)$ vertauscht mit $\psi'(B)$

$\overset{11.9.}{\Longrightarrow} \exists!\ \pi : A \otimes B \to B(H \hat{\otimes} K)$

$$a \otimes b \mapsto \varphi'(a)\psi'(b) = (\varphi(a) \hat{\otimes} 1)(1 \hat{\otimes} \psi(b))$$

$$= \varphi(a) \hat{\otimes} \psi(b)$$

Sei nun φ, ψ injektiv und $c \in \ker \Pi$

$c = \sum_{j=1}^{n} a_j \otimes b_j$ wobei $b_1, \dots, b_n$ linear unabh.

$\Rightarrow \psi(b_1), \dots, \psi(b_n)$ linear unabh. (da ψ injektiv)

$c \in \ker \Pi \Rightarrow 0 = \Pi(c) = \sum_{j=1}^{n} \varphi(a_j) \hat{\otimes} \psi(b_j)$

$\psi(b_j)$ lin. unabh $\overset{11.6.}{\Longrightarrow} \varphi(a_1) = \dots = \varphi(a_n) = 0$

$\overset{\varphi \text{ inj}}{\Longrightarrow} a_1 = \dots = a_n = 0$

$\Rightarrow c = 0$

d.h. Π injektiv $\square$

<u>11.12. Def.</u>: Seien A, B C^*-Algebren und (H, φ), (K, ψ) ihre universellen Darstellungen.

$\Pi : A \otimes B \to B(H \hat{\otimes} K)$

$\quad a \otimes b \mapsto \varphi(a) \hat{\otimes} \psi(b)$

sei der injektive $*$-Homom. gemäß 11.10.

Die Funktion

$\|\cdot\|_* : A \otimes B \to \mathbb{R}^+$

$\qquad c \mapsto \|\Pi(c)\|$

ist also eine C^*-Norm auf $A \otimes B$. Sie heißt die <u>räumliche (spatial) C^*-Norm</u>. Die Vervollständigung von $A \otimes B$ bzgl. $\|\cdot\|_*$ heißt das <u>räumliche Tensorprodukt</u> von A und B.

Bezeichnung: $A \otimes_* B$

11.13. Bem: 1) Beachte: $\|a\otimes b\|_* = \|a\|\cdot\|b\|$

2) Die Wahl der universellen Darstellungen in 11.11. ist willkürlich: φ und ψ müssen nur treu sein, dann bekommen wir immer die gleiche C^*-Norm $\|\ \|_*$.

11.14. Notation: Sei $\gamma: A\otimes B \to \mathbb{R}^+$ C^*-Norm auf $A\otimes B$. Die Vervollständigung von $A\otimes B$ bzgl. γ bezeichnen wir mit $A\otimes_\gamma B$.

11.15. Lemma: Seien A, B C^*-Algebren und γ eine C^*-Norm auf $A\otimes B$. Dann sind für jedes $a'\in A$ und $b'\in B$ die Abbildungen

$$\varphi: A \to A\otimes_\gamma B, \quad a \mapsto a\otimes b' \qquad , \qquad \psi: B \to A\otimes_\gamma B, \quad b \mapsto a'\otimes b$$

stetig.

Beweis: [beachte: wir wissen noch nicht, daß für C^*-Norm gilt: $\gamma(a\otimes b) \leq \|a\|\cdot\|b\|$ (bzw. sogar "=")]

φ ist Abb. zwischen Banachräumen; nach Satz vom abgeschlossenen Graphen reicht es zu zeigen:

$$\left.\begin{array}{l} a_n \to 0 \\ \varphi(a_n) \to c \in A\otimes_\gamma B \end{array}\right\} \overset{?}{\Longrightarrow} c = 0$$

o.E. seien a_n, b' positiv, somit auch $c \geq 0$

(ansonsten $a_n \rightsquigarrow a_n^* a_n$, $b' \rightsquigarrow b'^* b'$: $a_n \to 0 \Rightarrow a_n^* a_n \to 0$, $\varphi(a_n)^*\varphi(a_n) = a_n^* a_n \otimes b'^* b' \to c^* c$)

Sei τ positives lineares Funktional auf $A \otimes_\gamma B$

$\Rightarrow$ $\rho : A \to \mathbb{C}$ positiv, also stetig

$a \mapsto \tau(a \otimes b')$

$a_n \otimes b'$

$\Rightarrow \tau(c) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\tau(a_n \otimes b')}_{\rho(a_n)}$, da τ stetig und $\varphi(a_n) \to c$

$= \rho(\lim a_n)$

$= \rho(0)$

$= 0$

$\Rightarrow \tau(c) = 0 \quad \forall \tau$ pos lin. Fkt. auf $A \otimes_\gamma B$

$\Rightarrow c = 0$

also φ stetig

analog für ψ $\square$

<u>11.16. Satz:</u> Seien A, B C^*-Algebren und γ eine C^*-Norm auf $A \otimes B$. Sei (H, π) eine nicht-entartete Darstellung von $A \otimes_\gamma B$. Dann gibt es eindeutig bestimmte $*$-Homomorphismen

$\varphi : A \to B(H)$ und $\psi : B \to B(H)$

so daß

$\pi(a \otimes b) = \varphi(a)\psi(b) = \psi(b)\varphi(a) \quad \forall a \in A, b \in B$

Die Darstellungen (H, φ) und (H, ψ) sind nicht entartet.

<u>Beweis</u>: Wir beschränken uns auf den einfachen Fall, daß A, B unital. Allgemeiner Fall analog, aber technisch aufwendiger (mit approximierenden Einsen).

beachte: allgemeiner Fall kann nicht durch Unitalisierung auf unitalen Fall zurückgeführt werden, da γ von $A \otimes B$ nicht kanonisch auf $\tilde{A} \otimes \tilde{B}$ ausgedehnt werden kann.

Setze

$$\varphi(a) := \pi(a \otimes 1), \quad \psi(b) := \pi(1 \otimes b)$$

$\Rightarrow$ φ, ψ $*$-Homomorphismen mit

$$\pi(a \otimes b) = \pi((a \otimes 1)(1 \otimes b)) = \varphi(a)\psi(b) = \psi(b)\varphi(a)$$

π nicht-entartet $\Rightarrow$ $\pi(1 \otimes 1) = 1$, $\pi(1 \otimes 1) = \varphi(1) = \psi(1)$

$\Rightarrow$ φ, ψ nicht entartet

allgemeiner Fall: Sei (v_λ) appr. Eins für B, versuche φ durch

$$\varphi(a) = \lim_\lambda \pi(a \otimes v_\lambda) \quad \text{zu def.}$$

Def. $\varphi(a)$ zunächst auf $H_0 = \pi(A \otimes B)H$ durch

$$\varphi(a)\left(\sum_{i=1}^n \pi(a_i \otimes b_i)(\xi_i)\right) := \lim_\lambda \sum_{i=1}^n \pi(aa_i \otimes v_\lambda b_i)(\xi_i)$$

$$= \sum_{i=1}^n \pi(aa_i \otimes b_i)(\xi_i)$$

Zeige: φ wohldefiniert

stetig auf H_0 (benutze dazu Lemma 11.14)

dehne auf ganz H aus. ☐

11.17. Korollar: Seien A, B C^*-Algebren und γ eine C^*-Halbnorm auf $A \otimes B$. Dann gilt

$$\gamma(a \otimes b) \leq \|a\| \, \|b\| \qquad \forall a \in A, b \in B$$

Beweis: Sei $\delta := \max(\gamma, \|\cdot\|_*)$

$\Rightarrow$ δ ist C^*-Norm auf $A \otimes B$

(falls γ selbst C^*-Norm, so können wir γ direkt benutzen)

Sei (H, π) universelle Darstellung von $A \otimes_\delta B$

π nicht entartet

$\overset{11.16}{\Longrightarrow}$ $\exists$ $*$-Homomorphismen $\varphi: A \to B(H)$, $\psi: B \to B(H)$ mit

$$\pi(a \otimes b) = \varphi(a)\psi(b)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \delta(a \otimes b) &= \|\pi(a \otimes b)\| \qquad (\text{da } \pi \text{ treu})\\ &= \|\varphi(a)\psi(b)\|\\ &\leq \|\varphi(a)\| \cdot \|\psi(b)\|\\ &\leq \|a\| \cdot \|b\| \qquad (\text{da } *\text{-Homom. normvermindernd})\end{aligned}$$

also: $\gamma(a \otimes b) \leq \delta(a \otimes b) \leq \|a\| \cdot \|b\|$

☐