Zeige: φ wohldefiniert

stetig auf H_0 (benutze dazu Lemma 11.14)

dehne auf ganz H aus. $\square$

11.17. Korollar: Seien A, B C_1^*-Algebren und γ eine C_1^*-Halbnorm auf $A \otimes B$. Dann gilt

$$\gamma(a \otimes b) \leq \|a\| \, \|b\| \qquad \forall\, a \in A,\ b \in B$$

Beweis: Sei $\delta := \max(\gamma, \|\cdot\|_*)$

$\Rightarrow$ δ ist C_1^*-Norm auf $A \otimes B$

(falls γ selbst C_1^*-Norm, so können wir γ direkt benutzen)

Sei (H, π) universelle Darstellung von $A \otimes_\delta B$

π nicht entartet

$\overset{11.16}{\Longrightarrow}$ $\exists$ $*$-Homomorphismen $\varphi: A \to B(H)$, $\psi: B \to B(H)$ mit

$$\pi(a \otimes b) = \varphi(a)\,\psi(b)$$

$$\Rightarrow \delta(a \otimes b) = \|\pi(a \otimes b)\| \qquad (\text{da } \pi \text{ treu})$$
$$= \|\varphi(a)\,\psi(b)\|$$
$$\leq \|\varphi(a)\| \cdot \|\psi(b)\|$$
$$\leq \|a\| \cdot \|b\| \qquad (\text{da } *\text{-Homom. normvermindernd})$$

also: $\gamma(a \otimes b) \leq \delta(a \otimes b) \leq \|a\| \cdot \|b\|$

$\square$

<u>11.18. Def.</u>: Seien A, B C^*-Algebren. Sei Γ die Menge aller C^*-Normen auf $A \otimes B$. Setze

$$\|c\|_{max} := \sup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(c) \qquad \text{für } c \in A \otimes B$$

$$c = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \overset{11.17}{\Longrightarrow} \gamma(c) \leq \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\gamma(a_i \otimes b_i)}_{\leq \|a_i\| \cdot \|b_i\|}$$

$$\Rightarrow \|c\|_{max} \leq \sum_{i=1}^{n} \|a_i\| \, \|b_i\| < \infty$$

$$\|\cdot\|_{max} : A \otimes B \to \mathbb{R}^+ \qquad \text{ist eine } C^*\text{-Norm}$$
$$c \mapsto \|c\|_{max}$$

und heißt die <u>maximale</u> C^*-Norm. Die Vervollständigung $A \otimes_{max} B$ von $A \otimes B$ bzgl. $\|\cdot\|_{max}$ heißt das <u>maximale Tensorprodukt</u> von A und B.

<u>11.19. Bemerkungen:</u> 1) Für C^*-Halbnorm γ auf $A \otimes B$ gilt: $\gamma \leq \|\cdot\|_{max}$

(da $\max(\gamma, \|\cdot\|_*)$ C^*-Norm $\Rightarrow \max(\gamma, \|\cdot\|_*) \leq \|\cdot\|_*$);

insbesondere natürlich: $\|\cdot\|_* \leq \|\cdot\|_{max}$

2) Man kann zeigen: $\|\cdot\|_*$ ist die kleinste C^*-Norm auf $A \otimes B$, d.h. für jede C^*-Norm γ auf $A \otimes B$ gilt:

$\|\cdot\|_* \leq \gamma \leq \|\cdot\|_{max}$

$A \otimes_* B = A \otimes_{min} B$ heißt daher auch das minimale Tensorprodukt.

Oft heißen $A \otimes_{min} B$ und $A \otimes_{max} B$ auch injektives und projektives Tensorprodukt.

3) Eine der grundlegenden Schwierigkeiten der Tensorprodukte besteht darin, daß i.a

$\|\cdot\|_{min} \neq \|\cdot\|_{max}$.

Allerdings ist dies im konkreten Fall nicht so einfach zu zeigen.

Beispiel: $B(H) \otimes_{min} B(H) \neq B(H) \otimes_{max} B(H)$

(Pisier, Junge 1995)

4) Bedeutung von $\otimes_{min}$ liegt in konkreter Realisierung mittels Darstellungen, die von $\otimes_{max}$ in folgender universellen Eigenschaft.

<u>11.20. Satz</u>: Seien A, B, C C^*-Algebren und $\varphi: A \to C$ und $\psi: B \to C$ $*$-Homomorphismen, so daß $\varphi(A)$ mit $\psi(B)$ kommutiert. Dann gibt es genau einen $*$-Homomorphismus $\pi: A \otimes_{max} B \to C$ so daß

$$\pi(a \otimes b) = \varphi(a)\psi(b) \qquad \forall a \in A, b \in B.$$

<u>Beweis</u>: $11.9. \Rightarrow \exists$ $*$-Homom. $\pi: A \otimes B \to C$ mit den geforderten Eigenschaften.

Betrachte

$$\gamma: A \otimes B \to \mathbb{R}^+$$
$$c \mapsto \|\pi(c)\|$$

$\Rightarrow \gamma$ ist C^*-Halbnorm

$\overset{11.19}{\Longrightarrow} \gamma(c) \leq \|c\|_{max} \quad \forall c \in A \otimes B$

$\Rightarrow \pi: (A \otimes B, \|\cdot\|_{max}) \to (C, \|\,\|)$ stetig mit $\|\pi\| \leq 1$

$\Rightarrow \exists$ Ausdehnung $\pi: A \otimes_{max} B \to C$ $\square$

<u>11.21. Def.:</u> Eine C^*-Algebra A heißt <u>nuklear</u>, falls es für jede C^*-Algebra B nur eine C^*-Norm auf $A \otimes B$ gilt, d.h.

$$A \otimes_{min} B = A \otimes_{max} B \qquad \forall \; C^*\text{-Algebren } B.$$

Wir bezeichnen die eindeutige C^*-Vervollständigung von $A \otimes B$ dann mit $A \hat{\otimes} B$

<u>11.22. Bem.:</u> Falls es eine vollständige C^*-Norm $\|\cdot\|$ auf $A \otimes B$ gilt (d.h. $A \otimes B$ ist bzgl. $\|\cdot\|$ C^*-Algebra), so ist dies die einzige C^*-Norm auf $A \otimes B$.

denn: Sei γ C^*-Norm auf $A \otimes B$

$\Rightarrow$ Identität: $(A \otimes B, \|\cdot\|) \longrightarrow A \otimes_\gamma B$

ist injektiver $*$-Homomorphismus, also isometrisch

$\Rightarrow \gamma = \|\cdot\|$

<u>11.23. Satz:</u> 1) $M_n(\mathbb{C})$ ist nuklear für alle $n \geq 1$, und es gilt für alle C^*-Algebren A:

$$M_n(\mathbb{C}) \otimes A \cong M_n(A)$$

2) Jede endlich-dimensionale C^*-Algebra ist nuklear.

<u>Beweis:</u> 1) Die Abb.

$$M_n(\mathbb{C}) \otimes A \longrightarrow M_n(A)$$

$$(\lambda_{ij})_{i,j=1}^{n} \otimes a \longrightarrow (\lambda_{ij}\, a)_{i,j=1}^{n}$$

ist ein $*$-Isomorphismus und $M_n(A)$ ist C^*-Algebra bzgl. kanonischer Norm ($\rightarrow$ 5.12)

Somit gilt es vollständige C^*-Norm auf $M_n(\mathbb{C}) \otimes A$

$\overset{11.22}{\Longrightarrow}$ nur eine C^*-Norm auf $M_n(\mathbb{C}) \otimes A$

2) Sei A endlich-dimensionale C^*-Algebra

$\Rightarrow A \cong M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus .. \oplus M_{n_k}(\mathbb{C})$

Sei B beliebige C^*-Algebra

$\overset{1)}{\Rightarrow} A \otimes B \cong M_{n_1}(B) \oplus .. \oplus M_{n_k}(B)$

$\Rightarrow \exists$ vollständige C^*-Norm auf $A \otimes B$

$\Rightarrow$ C^*-Norm auf $A \otimes B$ eindeutig

$\Rightarrow$ A nuklear $\square$

<u>11.24 Satz</u>: Sei A C^*-Algebra und $(A_n)_{n=1}^\infty$ eine <u>aufsteigende</u> Folge von C^*-Unteralgebren mit $A = \overline{\bigcup_{n=1}^\infty A_n}$. Sind alle A_n nuklear, so ist auch A nuklear.

<u>Beweis</u>: Sei B beliebige C^*-Algebra und β, γ C^*-Normen auf $A \otimes B$.

Setze $C := \bigcup_{n=1}^\infty A_n \otimes B$ $\quad$ $*$-Unteralgebra von $A \otimes B$

C ist dicht in $A \otimes_\beta B$ und $A \otimes_\gamma B$

(denn: $A \otimes B$ dicht in $A \otimes_\beta B$ und C dicht in $A \otimes B$ bzgl. bel. C^*-Norm: $a \otimes b \in A \otimes B \Rightarrow \exists a_n \in A_n$, $a_n \to a$

$\Rightarrow \underset{\underset{C}{\cap}}{a_n \otimes b} \to a \otimes b$ nach 11.15)

A_n nuklear $\Rightarrow \beta = \gamma$ auf $A_n \otimes B$ $\forall n$

$\Rightarrow \beta = \gamma$ auf C

Sei nun $a \otimes b \in A \otimes B$

$\Rightarrow \exists\, a_n \in A_n,\ a_n \to a$

$\Rightarrow a_n \otimes b \to a \otimes b$ bzgl. γ und β

d.h. $\left.\begin{array}{l} \beta(a_n \otimes b) \to \beta(a \otimes b) \\ \quad \shortparallel \\ \gamma(a_n \otimes b) \to \gamma(a \otimes b) \end{array}\right\} \Rightarrow \beta(a \otimes b) = \gamma(a \otimes b)$

$\Rightarrow \beta = \gamma$ auf $A \otimes B$

$\Rightarrow A$ nuklear $\square$

<u>11.25 Korollar:</u> Alle AF-Algebren sind nuklear.

<u>Beweis:</u> A AF-Algebra

$\Rightarrow A = \overline{\bigcup A_n}$, wobei A_n endlich-dimensional

$\overset{11.23}{\Longrightarrow} A_n$ nuklear $\forall n$

$\overset{11.24}{\Longrightarrow} A$ nuklear $\square$

<u>11.26 Beispiele:</u> 1) UHF-Algebren sind nuklear

2) $\mathcal{K}(H)$ ist nuklear (da $\mathcal{K}(H)$ AF-Algebra)

11.27. Notation: Sei X ein lokalkompakter Raum und B eine C^*-Algebra. Dann setzen wir

$$C_0(X,B) := \{ f : X \to B \mid f \text{ stetig}, f \text{ verschwindet im } \infty, \\ (\text{d.h. } t \mapsto \|f(t)\| \text{ verschwindet im } \infty) \}$$

Mit den punktweisen Operationen und der sup-Norm

$$\|f\|_\infty := \sup_{t \in X} \|f(t)\|$$

wird $C_0(X,B)$ zu einer C^*-Algebra.

Wir betrachten nun die natürliche Abb.

$$\iota : C_0(X) \otimes B \longrightarrow C_0(X,B)$$
$$f \otimes b \longmapsto \iota(f \otimes b) \text{ mit } \iota(f\otimes b)(t) = f(t)\, b$$

d.h. $(f \otimes b)(t) \mathrel{\hat{=}} f(t)\, b$

11.28. Satz: 1) Die natürliche Abb. $C_0(X) \otimes B) \xrightarrow{\iota} C_0(X,B)$ ist injektiv. Das Bild von ι ist dicht bzgl. $\|\cdot\|_\infty$.

2) Für jede C^*-Norm γ auf $C_0(X) \otimes B$ gilt:

$$\gamma(f) = \|\iota(f)\|_\infty \qquad (f \in C_0(X) \otimes B)$$

3) $C_0(X)$ ist nuklear und es gilt

$$C_0(X) \hat{\otimes} B \cong C_0(X,B)$$