<u>11.27. Notation:</u> Sei X ein lokalkompakter Raum und B eine C^*-Algebra. Dann setzen wir

$$C_0(X,B) := \{ f : X \to B \mid f \text{ stetig}, f \text{ verschwindet im } \infty, \text{ (d.h. } t \mapsto \|f(t)\| \text{ verschwindet im } \infty) \}$$

Mit den punktweisen Operationen und der sup-Norm

$$\|f\|_\infty := \sup_{t \in X} \|f(t)\|$$

wird $C_0(X,B)$ zu einer C^*-Algebra.

Wir betrachten nun die natürliche Abb.

$$\iota : C_0(X) \otimes B \to C_0(X,B)$$
$$f \otimes b \mapsto \iota(f\otimes b) \text{ mit } \iota(f\otimes b)(t) = f(t)\,b$$

d.h. $(f\otimes b)(t) \hat{=} f(t)\,b$

<u>11.28. Satz:</u> 1) Die natürliche Abb. $C_0(X) \otimes B) \xrightarrow{\iota} C_0(X,B)$ ist injektiv. Das Bild von ι ist dicht bzgl. $\|\cdot\|_\infty$.

2) Für jede C^*-Norm γ auf $C_0(X) \otimes B$ gilt:

$$\gamma(f) = \|\iota(f)\|_\infty \qquad (f \in C_0(X) \otimes B)$$

3) $C_0(X)$ ist nuklear und es gilt

$$C_0(X) \hat{\otimes} B \cong C_0(X,B)$$

Beweis: 1) Betrachte $f = \sum_{j=1}^{n} f_j \otimes b_j$, $b_1, \dots, b_n$ lin. unabh.

Sei $\iota(f) = 0$, d.h. $\sum_{j=1}^{n} f_j(t)\, b_j = 0 \quad \forall t$

$\Rightarrow f_1(t) = \dots = f_n(t) = 0 \quad \forall t$

$\Rightarrow f_1 = \dots = f_n = 0 \Rightarrow f = 0$, d.h. ι injektiv

Sei nun $g \in C_0(X, B)$, o.E. $K := \operatorname{supp} g$ kompakt

Sei $\varepsilon > 0$

Da $g(X) = g(K)$ kompakt

$\Rightarrow \exists\, b_1, \dots, b_n$ so daß mit

$\mathcal{U}_j := \{ t \in X \mid \| g(t) - b_j \| < \varepsilon \}$ offen

gilt:

$K \subset X = \mathcal{U}_1 \cup \dots \cup \mathcal{U}_n$

Urysohn $\Rightarrow \exists\, h_1, \dots, h_n \in \mathcal{C}(X)$ mit

$h_j \geq 0$, $\operatorname{supp} h_j \subset \mathcal{U}_j$ und $\sum_{j=1}^{n} h_j \equiv 1$ auf K

$\Rightarrow g = \sum h_j \cdot g$

$$\| g - \sum h_j \otimes b_j \|_\infty = \sup_{t \in X} \underbrace{\{ \| g(t) - \sum h_j(t)\, b_j \| \}}$$

$$\leq \sum h_j(t) \underbrace{\| g(t) - b_j \|}_{< \varepsilon \text{ für } h_j(t) \neq 0}$$

$$\leq \varepsilon \sum h_j(t)$$

$$\leq \varepsilon$$

2) Wir zeigen zunächst

$$\|f\|_{max} = \|\iota(f)\|_\infty \qquad (f \in C_0(X) \otimes B)$$

Es gilt:

$$\|f\|_{max} = \sup \{ \|\pi(f)\| \mid \pi \text{ irreduzible Darstellung von } C_0(X) \otimes B \}$$

Sei (π, H) solche irreduzible Darstellung

$\overset{11.16}{\Rightarrow} \; \exists \; \varphi : C_0(X) \to B(H), \; \psi : B \to B(H)$ Darstellungen

mit

$$\pi(f \otimes b) = \varphi(f)\psi(b)$$

Es gilt: $\varphi(C_0(X)) \subset \pi(C_0(X) \otimes B)' = \mathbb{C} \cdot 1$

da π irreduzibel

$$\begin{aligned} \varphi(f)\pi(g \otimes b) &= \varphi(fg)\psi(b) \\ &= \varphi(gf)\psi(b) \\ &= \varphi(g)\psi(b)\varphi(f) \\ &= \pi(g \otimes b)\varphi(f) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \varphi$ ein-dimensionale Darstellung von $C_0(X)$, ("Charakter")

d.h. $\exists \, t_0 \in X : \varphi(f) = f(t_0) \cdot 1$

also: $\pi(f \otimes b) = \varphi(f)\psi(b) = f(t_0)\psi(b)$

$$= \psi((f \otimes b)(t_0))$$

$\Rightarrow \pi(g) = \psi(g(t_0)) \qquad \forall \, g \in C_0(X) \otimes B$

also: $g \in C_0(X) \otimes B$

$\Rightarrow \|\pi(g)\| = \|\psi(g(t_0))\| \le \|g(t_0)\| \le \|g\|_\infty$

$\Rightarrow \|g\|_{max} \le \|g\|_\infty$

Da $\|g\|_\infty$ auch C^*-Norm auf $C_0(X) \otimes B$

$\Rightarrow \|g\|_{max} = \|g\|_\infty$

Sei γ nun C^*-Norm auf $C_0(X) \otimes B$

z.z.: $\gamma \ge \|\cdot\|_{max}$

Sei π treue Darstellung von $C_0(X) \otimes_\gamma B$ und

$\pi(f \otimes b) = \varphi(f)\psi(b) \qquad (f \in C_0(X) \otimes B)$

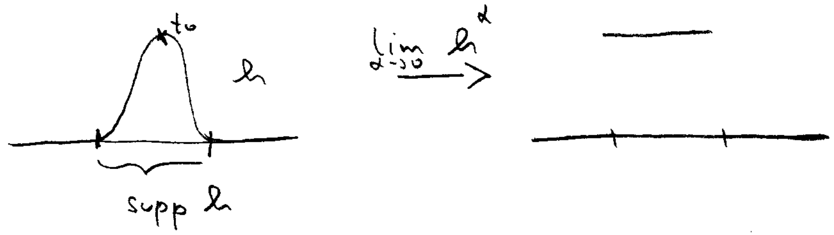
mit Darstellungen φ, ψ von $C_0(X)$, B

Betrachte nun $f \in C_0(X) \otimes B$:

Sei $t_0 \in X$ mit $\|f\|_\infty = \|f(t_0)\|$

Sei $h \in C_0(X)$ mit $0 \le h \le 1$, $h(t_0) = 1$, so daß

$\|f(t) - f(t_0)\| \le \varepsilon$ auf supp h



Es gilt: $\lim_{\alpha \to 0} \gamma(h^\alpha \otimes b) =: \gamma_\infty(b)$ existiert

und ist C^*-Norm auf B, also notwendigerweise

$\gamma_\infty(b) = \|b\|$

Nun gilt:

$$
\begin{aligned}
\gamma(f) &= \| \pi(f) \| \\
&\geq \| \varphi(h^\alpha)\, \pi(f) \| \qquad (\text{da } \|\varphi(h^\alpha)\| \leq \|h^\alpha\| = 1) \\
&= \| \pi(h^\alpha f) \| \\
&= \| \pi(h^\alpha \otimes f(t_0)) - (\pi(h^\alpha \otimes f(t_0)) - h^\alpha f) \| \\
&\geq \| \pi(h^\alpha \otimes f(t_0)) \| - \| \pi(h^\alpha \otimes f(t_0) - h^\alpha f) \| \\
&= \gamma(h^\alpha \otimes f(t_0)) - \underbrace{\gamma(h^\alpha \otimes f(t_0) - h^\alpha f)}_{\substack{\leq \| h^\alpha \otimes f(t_0) - h^\alpha f \|_{max} \\ \leq \varepsilon}}
\end{aligned}
$$

$$
\gamma(h^\alpha \otimes f(t_0)) \xrightarrow{\alpha \to 0} \| f(t_0) \| = \| f \|_\infty
$$

$$\Rightarrow \gamma(f) \geq \|f\|_\infty - \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow \gamma(f) \geq \|f\|_\infty = \|f\|_{max}$$

$$\Rightarrow \gamma = \|\cdot\|_{max}$$

3) klar nach 1), 2)

$\square$

11.29. Korolla (Satz von Takesaki): Jede kommutative C^*-Algebra ist nuklear.

11.30. Bem: Es gilt

$$C_0(X) \hat{\otimes} C_0(Y) \cong C_0(X, C_0(Y)) \cong C_0(X \times Y),$$

also z.B.

$$C_0(\mathbb{R}) \otimes C_0(\mathbb{R}) \cong C_0(\mathbb{R}^2)$$

11.31. Korolla: Seien A, B C^*-Algebren und γ eine C^*-Norm auf $A \otimes B$. Dann gilt

$$\gamma(a \otimes b) = \|a\| \cdot \|b\| \qquad \forall\, a \in A,\ b \in B$$

Beweis: Es gilt

$$\gamma(a \otimes b)^2 = \gamma((a \otimes b)^*(a \otimes b)) = \gamma(a^*a \otimes b^*b)$$

Schränke ein auf

$$A_0 := C^*(a^*a), \quad B_0 := C^*(b^*b)$$

$\gamma|_{A_0 \otimes B_0}$ C^*-Norm

$$\Rightarrow \underset{\substack{\| \\ \gamma(a\otimes b)^2}}{\gamma(a^*a \otimes b^*b)} = \|a^*a \otimes b^*b\|_\infty = \|a^*a\|\,\|b^*b\| = \|a\|^2\,\|b\|^2$$

$\square$