12. Die Cuntzalgebra O_n

12.1. Def.: Sei $2 \leq n < \infty$. Die Cuntzalgebra O_n ist die universelle C^*-Algebra

$$O_n := C^*\left(s_1, \dots, s_n \text{ Isometrien}, \sum_{i=1}^{n} s_i s_i^* = 1\right)$$

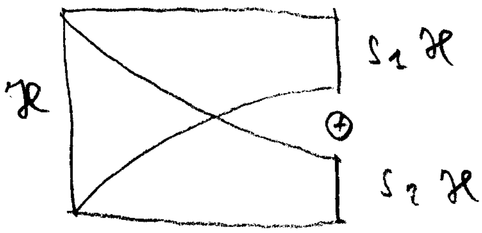
12.2. Bem: 1) $\exists$ solche Isometrien, d.h.

O_n ist nicht trivial (beachte auch: $\|s_i\| = 1$)

Sei $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$ mit ONB $(e_i)_{i=1}^{\infty}$

$n = 2$: $\quad s_1 e_i = e_{2i}$

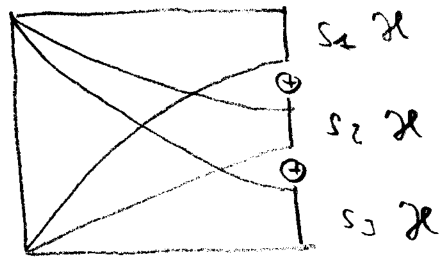
$\quad s_2 e_i = e_{2i-1}$



$n = 3$: $\quad s_1 e_i = e_{3i}$

$\quad s_2 e_i = e_{3i-1}$

$\quad s_3 e_i = e_{3i-2}$



usw.

2) O_n hat also folgende universelle Eigenschaft:

Sei B eine C^*-Algebra mit $T_1, \dots, T_n \in B$, für die gilt: T_i Isometrien, $\sum_{i=1}^{n} T_i T_i^* = 1$

$\Rightarrow$ $\exists$ eindeutigen $*$-Homomorph. (vgl. Ü2)

$\varphi: O_n \to B$ mit $\varphi(s_i) = T_i$

3) Universelle Eigenschaft hat folgende Konsequenz: Sei $\varsigma \in \mathbb{C}$ mit $|\varsigma| = 1$

Betrachte $s_1, \dots, s_n \in \mathcal{O}_n$, setze $T_i := \varsigma s_i$

$\Rightarrow T_1, \dots, T_n \in \mathcal{O}_n$ erfüllen die gleichen Relationen wie $s_1, \dots, s_n$ also $T_i^* = \bar{\varsigma} s_i^*$

$\Rightarrow \exists\, !$ $*$-Homomorphismus $\rho_\varsigma : \mathcal{O}_n \to \mathcal{O}_n$ mit $\rho(s_i) = T_i = \varsigma s_i$

Da $\rho_{\bar{\varsigma}} = \rho_\varsigma^{-1}$, ist ρ_ς sogar ein Isomorphismus

<u>12.3 Notation</u>: Für $\mu = (i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, n\}^k$ setzen wir:

$|\mu| = k$ Länge vom Wort μ

$S_\mu := S_{i_1} \cdots S_{i_k}$

<u>12.4. Lemma</u>: (a) $S_i^* S_j = \delta_{ij} \cdot 1$

(b) $|\mu| = |\nu| \Rightarrow S_\mu^* S_\nu = \delta_{\mu\nu} \cdot 1$

(c) $|\mu| < |\nu| \Rightarrow S_\mu^* S_\nu = \begin{cases} S_{\tilde{\nu}} & \text{falls } \nu = \mu\tilde{\nu} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$|\mu| > |\nu| \Rightarrow S_\mu^* S_\nu = \begin{cases} S_{\tilde{\mu}}^* & \text{falls } \mu = \nu\tilde{\mu} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

<u>Beweis</u>: (a) $i = j$: S_i Isometrie, also $S_i^* S_i = 1$

$i \neq j$: $s_i s_i^* + s_j s_j^* \leq \sum_{k=1}^{n} s_k s_k^* = 1$

$$\Rightarrow \underbrace{s_i^* (s_i s_i^* + s_j s_j^*) s_i}_{1 + s_i^* s_j s_j^* s_i} \leq s_i^* s_i = 1$$

$$\Rightarrow s_i^* s_j s_j^* s_i \leq 0$$

aber auch: $s_i^* s_j s_j^* s_i = s_i^* s_j \cdot (s_i^* s_j)^* \geq 0$

$$\Rightarrow s_i^* s_j s_j^* s_i = 0$$

$$\Rightarrow \| s_i^* s_j \|^2 = \| s_i^* s_j s_j^* s_i \| = 0$$

$$\Rightarrow s_i^* s_j = 0$$

b), c) klar $\square$

<u>12.5 Satz</u>: (a) $\mathcal{F}_k^n := \operatorname{Span}\{ S_\mu S_\nu^* \mid |\mu| = |\nu| = k \}$

$\cong M_{n^k}$ für $k \in \mathbb{N}$

(b) Für $l \leq k$ haben wir unitale Einbettung

$\mathcal{F}_l^n \subseteq \mathcal{F}_k^n$

(c) $\mathcal{F}^n := \overline{\bigcup_{k \geq 1} \mathcal{F}_k^n} \subset \mathcal{O}_n$

ist UHF-Algebra vom Typ n^∞

<u>Beweis</u>: $e_{\mu\nu} := s_\mu s_\nu^* \in \mathcal{F}_k^n$ sind Matrixeinheiten

z.B. $n = 2$, $k = 1$: $s_1 s_1^* \hat{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $s_1 s_2^* \hat{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$s_2 s_1^* \hat{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $s_2 s_2^* \hat{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Einbettung $\mathcal{F}_k^n \to \mathcal{F}_{k+1}^n$

$$s_\mu s_\nu^* \mapsto \sum_{i=1}^n s_{\mu i} s_{\nu i}^* = s_\mu \underbrace{\left(\sum s_i s_i^*\right)}_{=1} s_\nu$$

ist unital, hat also Multiplizität n

$\Rightarrow \mathcal{F}^n$ ist UHF vom Typ n^∞ $\square$

<u>12.6. Bem:</u> Wegen 12.4. reduziert sich jedes Wort in den $\{s_i, s_i^* \mid i = 1, \dots, n\}$ auf die Form $s_\mu s_\nu^*$, d.h.

$\operatorname{Span}\{s_\mu s_\nu^* \mid \mu, \nu \text{ beliebig}\} \subseteq O_n$ dicht

Bei $\mathcal{F}^n$ treten nur $s_\mu s_\nu^*$ mit $|\mu| = |\nu|$ auf.

Man kann nun O_n auf $\mathcal{F}^n$ "projezieren" indem man die Terme mit $|\mu| \neq |\nu|$ wegwirft

<u>12.7. Def.:</u> Seien A, B C^*-Algebren mit $1 \in B \subset A$. Eine <u>Erwartung</u>

$\Phi : A \to B$

ist eine positive lineare Abb. mit

$\Phi(1) = 1$ und $\Phi^2 = \Phi$

Φ heißt <u>treu</u>, falls $\Phi(x^*x) = 0 \Rightarrow x = 0$

<u>12.8 Satz:</u> Es existiert eine treue Erwartung $\Phi : O_n \to \mathcal{F}^n$ mit

$$\Phi(s_\mu s_\nu^*) = \begin{cases} s_\mu s_\nu^* & \text{falls } |\mu| = |\nu| \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

<u>Beweis</u>: Sei $\varphi_\varsigma : \mathcal{O}_n \to \mathcal{O}_n$ der $*$-Isomorphismus

$\varphi_\varsigma(S_i) = \varsigma S_i$ (wobei $|\varsigma| = 1$)

Dann definiere

$$\Phi(x) := \int_0^1 \varphi_{e^{2\pi i t}}(x)\, dt \quad \left(\begin{array}{l}\text{macht Sinn als}\\ \text{Riemann-Integral}\\ \text{in Norm}\end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Φ ist positiv, linear, unital, treu
(gilt jeweils für jedes t)

und

$$\Phi(S_\mu S_\nu^*) = \underbrace{\left(\int_0^1 e^{2\pi i t(|\nu| - |\nu|)}\, dt\right)}_{\delta_{|\nu|,|\mu|}} S_\mu S_\nu^*$$

$\square$

<u>12.9. Lemma</u>: (a) Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine Isometrie $W_k \in \mathcal{O}_n$, so dass

(i) $W_k x = x W_k \quad \forall x \in \mathcal{F}_k^n$

(ii) $\Phi(x) = W_k^* x W_k \quad \forall x \in \operatorname{Span}\{S_\mu S_\nu^* \mid |\mu|, |\nu| \leq k\}$

(b) Es gilt

$$\Phi(x) = \lim_{r \to \infty} \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{r} W_k^* x W_k \quad \forall x \in \mathcal{O}_n$$

<u>Beweis</u>: (a) Setze

$$W_k := \sum_{\substack{\delta \text{ mit}\\ |\delta| = k}} S_\delta S_1^{2k} S_2 S_\delta^*$$

(i), (ii) nachrechnen.

Beispiel: $n = 2,\ k = 1$

$$w_1 = S_1 S_1^2 S_2 S_1^* + S_2 S_1^2 S_2 S_2^* \quad \rightsquigarrow w_1^* w_1 = 1$$

$$\Rightarrow w_1^* S_1 S_2^* w_1 = S_1 S_2^* S_1^{*2} \underbrace{S_1^* S_1}_{=1} \underbrace{S_2^* S_2}_{=1} S_1^2 S_2 S_2^*$$

$= 1$

$= 1$

$$= S_1 S_2^*$$

$$w_1^* S_1 w_1 = S_1 S_2^* S_1^{*2} S_1^* S_1 S_1 S_1^2 S_2 S_1^* = 0$$

(b) Nach (ii) gilt Formel für

$x \in \operatorname{Span}\{ S_\mu S_\nu^* \mid \mu, \nu \text{ beliebig} \}$

Da diese dicht in O_n und beide Seiten stetig in x sind, gilt sie dann für alle x in O_n. $\square$

<u>12.10 Satz</u>: O_n ist einfach. Somit gilt:

Sind $T_1, \dots, T_n$ Isometrien mit $\sum_{i=1}^n T_i T_i^* = 1$, dann ist $C^*(T_1, \dots, T_n) \cong O_n$

<u>Beweis</u>: Sei $I \lhd O_n \quad I \neq \{0\}$

$\Rightarrow \Phi(I) \subset \Phi(O_n) = \mathcal{F}^n$

12.9(b) $\Rightarrow \Phi(I) \subset I$ da I abg.

Φ treu $\Rightarrow \Phi(I) \neq \{0\}$

$\Rightarrow I \cap \mathcal{F}^n \neq \{0\}$

aber: $I \cap \mathcal{F}^n \triangleleft \mathcal{F}^n$

$\mathcal{F}^n$ einfach (da UHF-Algebra)

$\Rightarrow I \cap \mathcal{F}^n = \mathcal{F}^n$

$\Rightarrow 1 \in I$

$\Rightarrow I = \mathcal{O}_n$ $\square$

<u>12.11. Bem:</u> 1) Durch Verfeinerung der Argumente kann man auch zeigen: $\mathcal{O}_n$ ist <u>rein unendlich</u>, d.h. $\forall x \in \mathcal{O}_n, x \neq 0 \; \exists a, b \in \mathcal{O}_n : axb = 1$

2) Weiterhin sind die $\mathcal{O}_n$ nuklear.

3) Es gibt auch noch

$$\mathcal{O}_\infty := C^*(s_1, s_2, \ldots \text{ Isometrien} \mid \sum_{i=1}^N s_i s_i^* \leq 1 \; \forall N)$$

$$= C^*(s_1, s_2, \ldots \text{ Isometrien} \mid s_i^* s_j = \delta_{ij} \cdot 1)$$

4) J. Cuntz: Simple C^*-algebras generated by isometries. CMP 57, 1977

5) Mit Hilfe von K-Theorie konnte Cuntz (1981) zeigen: $\mathcal{O}_n \not\cong \mathcal{O}_m$ für $n \neq m$