13. Die C^*-Algebra der freien Gruppe

13.1. Def.: Sei $n \geq 2$. Betrachte die universelle C^*-Algebra

$$C^*(\mathbb{F}_n) := C^*(u_1, \dots, u_n \mid u_i \text{ unitär}),$$

die von n unitären Elementen erzeugt wird.
Dies ist die (volle) C^*-Algebra der freien Gruppe $\mathbb{F}_n$ in n Generatoren.

13.2. Bem.: 1) Jedes n-Tupel von unitären Elementen gibt eine Darstellung von $C^*(\mathbb{F}_n)$

2) $C^*(\mathbb{F}_n)$ ist nicht einfach, es gibt viele Quotienten.

z.B.: Seien $U_1, \dots, U_n \in M_k$ endlichdim. unitäre Elemente.

Universelle Eigenschaft $\Rightarrow \exists$ $*$-Homomorph.

$$\varphi: C^*(\mathbb{F}_n) \to M_k$$
$$u_i \mapsto U_i$$

$\Rightarrow \ker \varphi$ ist nicht-triviales Ideal in $C^*(\mathbb{F}_n)$

[d.h. also: die Norm von Polynomial $p(U_1, \dots, U_n)$ in n unitären Elementen ist nicht eindeutig bestimmt, sondern hängt von $U_1, \dots, U_n$ ab!]

3) $\mathbb{F}_n$ ist sehr große Gruppe mit vielen Darstellungen – $C^*(\mathbb{F}_n)$ berücksichtigt alle. Es ist oft interessanter, sich auf die linksreguläre Darstellung zu beschränken.

<u>13.3. Def.</u>: Betrachte $\ell^2(\mathbb{F}_2)$ mit ONB

$\delta_g \quad (g \in \mathbb{F}_n)$

Stelle $\mathbb{F}_n$ auf $\ell^2(\mathbb{F}_2)$ durch Links-Multiplikation dar, d.h. durch lineare Fortsetzung und Stetigkeit

$$\lambda(h)\,\delta_g = \delta_{hg}$$

Dann ist $\lambda : \mathbb{F}_n \to B(\ell^2(\mathbb{F}_n))$ und $\lambda(g)$ ist für jedes $g \in \mathbb{F}_n$ ein unitärer Operator.

Die C^*-Algebra

$$C^*_{red}(\mathbb{F}_n) := \overline{\operatorname{span}\{\lambda(g) \mid g \in \mathbb{F}_n\}} \subset B(\ell^2(\mathbb{F}_n))$$

heißt <u>reduzierte C^*-Algebra von $\mathbb{F}_n$</u>.

<u>13.4. Satz</u>: Die Abb. (wobei $e \in \mathbb{F}_n$ neutrales Element)

$$\tau : x \mapsto \langle x\delta_e, \delta_e \rangle$$

ist eine treue Spur auf $C^*_{red}(\mathbb{F}_n)$

<u>Beweis</u>: Spur: z.z.: $\tau(xy) = \tau(yx) \quad \forall x, y \in C^*_{red}(\mathbb{F}_n)$

Da τ linear und stetig, reicht es dies für $x = \lambda(g)$ und $y = \lambda(h)$ $(g, h \in \mathbb{F}_n)$ z.z.

$$\tau(\lambda(g)\lambda(h)) = \langle \lambda(g)\lambda(h)\delta_e, \delta_e \rangle$$
$$= \langle \delta_{gh}, \delta_e \rangle$$
$$= \begin{cases} 1 & \text{falls } gh = e \iff hg = e \\ 0 & gh \neq e \end{cases}$$
$$= \langle \delta_{hg}, \delta_e \rangle$$
$$= \tau(\lambda(h)\lambda(g))$$

treu: Sei $x \in C^*_{red}(\mathbb{F}_n)$ mit $\tau(x^*x) = 0$, d.h.

$$0 = \tau(x^*x) = \langle x\delta_e, x\delta_e \rangle$$

$\Rightarrow x\delta_e = 0$

z.z.: $x\delta_g = 0 \quad \forall g \in \mathbb{F}_n$

Setze $y := x\lambda(g) \Rightarrow x\delta_g = y\delta_e$

$$\Rightarrow \tau(y^*y) = \tau(\lambda^*(g)\, x^*x\, \lambda(g))$$
$$= \tau(\underbrace{\lambda(g)\lambda^*(g)}_{=1}\, x^*x)$$
$$= \tau(x^*x)$$
$$= 0$$

$x\delta_g = y\delta_e = 0$ $\square$

13.5 Lemma: Sei $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_0^\perp$.

Seien $B, U_i \in B(\mathcal{H})$ $(i = 1, .., n)$ mit

- U_i unitär $\forall i$
- B hat bzgl. der Zerlegung von $\mathcal{H}$ die Form

$$B = \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

- $U_i U_j^*$ hat die Form

$$U_i U_j^* = \begin{pmatrix} * & * \\ * & 0 \end{pmatrix} \qquad \forall i \neq j$$

Dann gilt

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} U_i^* B U_i \right\| \leq \frac{2}{\sqrt{n}} \| B \|$$

Beweis: Schreibe

$$B = \underset{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ * & * \end{pmatrix}}{\underset{\shortparallel}{B_1}} + \underset{\begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}}{\underset{\shortparallel}{B_2}}$$

Beh. folgt dann aus

i) $\left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} U_i^* B_1 U_i \right\| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \| B_1 \| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \| B \|$

und

ii) $\left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} U_i^* B_2 U_i \right\| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \| B_2 \| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \| B \|$

Wir zeigen (i); (ii) ist analog

schreibe B statt B_1

beachte: für $i \neq j$ gilt

$$C := (U_i U_j^*)\, B\, (U_j U_i^*) = \begin{pmatrix} * & * \\ * & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * \\ * & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

also: $B^* C = 0 = C^* B$

$$\begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

und somit:

$$\| B + C \|^2 = \| (B^* + C^*)(B + C) \|$$

$$= \| B^* B + C^* C \|$$

$$\leq \| B \|^2 + \| C \|^2$$

Also:

$$\Big\| \sum_{i=1}^n U_i^* B U_i \Big\|^2 = \Big\| U_1^* \Big(B + \sum_{i=2}^n (U_1 U_i^*) B (U_i U_1)^*\Big) \cdot U_1 \Big\|^2$$

$$\leq \| B \|^2 + \Big\| \sum_{i=2}^n U_i^* B U_i \Big\|^2$$

$$\stackrel{\text{Induktion}}{\leq} n \, \| B \|^2$$

$\Rightarrow$ (i) $\square$

Wir betrachten im Folgenden $\mathbb{F}_2$, Analoges gilt aber auch für $\mathbb{F}_n$. u, v seien Generatoren von $\mathbb{F}_2$

13.6. Korollar: Für $g \in \mathbb{F}_2$ gilt:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda(u^i)\lambda(g)\lambda(u^{-i}) =$$

$$= \begin{cases} \lambda(g) & \text{falls } g = u^k \text{ für } k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis: Sei g nicht von Form u^k

$\Rightarrow$ $g = u^p g_0 u^q$, wobei g_0 in reduzierte Form jeweils mit $v^{\pm 1}$ startet oder endet

Setze

$\mathcal{H}_0 := \operatorname{span}\{\delta_h : h = 1 \text{ oder } h \text{ startet mit } u^{\pm 1}\}$

$\Rightarrow$ $\mathcal{H}_0^{\perp} = \operatorname{span}\{\delta_h : h \text{ startet mit } v^{\pm 1}\}$

$$\Rightarrow \lambda(g_0) = \begin{array}{cc} & \\ \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & * \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \mathcal{H}_0 \\ \mathcal{H}_0^{\perp} \end{array} \\ \begin{array}{cc} \mathcal{H}_0 & \mathcal{H}_0^{\perp} \end{array} & \end{array}$$

$$\lambda(u^k)\lambda(g_0)\lambda(u^{-\ell}) = \begin{pmatrix} * & * \\ * & 0 \end{pmatrix} \qquad k \neq \ell$$

Somit 13.5 anwendbar

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda(u^i) \underbrace{\lambda(g)}_{\lambda(u^p)\lambda(g_0)\lambda(u^q)} \lambda(u^{-i})$$

$$= \lambda(u^p) \underbrace{\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda(u^i)\lambda(g_0)\lambda(u^{-i}) \right)}_{\to 0 \text{ nach } 13.5.} \lambda(u^q)$$

– falls $g = u^k$, dann

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda(u^i)\lambda(g)\lambda(u^{-i}) = \lambda(g) \quad \forall n \geq 1$$ □

<u>13.7. Satz</u>: Es gilt $\forall x \in C^*_{red}(\mathbb{F}_2)$

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \lambda(u^i v^j)\, x\, \lambda(v^{-j} u^{-i}) = \tau(x)\cdot 1$$

– <u>Beweis</u>: Wegen Linearität und Stetigkeit reicht es, dies für $x = \lambda(g)$ $(g \in \mathbb{F}_2)$ zu zeigen.
Aber für dies folgt Beh. aus zweifacher Anwendung von 13.6. □

<u>13.8 Korollar</u>: $C^*_{red}(\mathbb{F}_2)$ ist einfach.

<u>Beweis</u>: Sei $I \triangleleft C^*_{red}(\mathbb{F}_2)$ abg. Ideal
sei $x \in I$ mit $x \neq 0$ $\Rightarrow$ $x^*x \in I$, $x^*x \neq 0$
$\Rightarrow \tau(x^*x) > 0$ (da τ treu).

$$x \in I \overset{I \text{ abg.}}{\Longrightarrow} \underbrace{\lim_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \lambda(u^i v^j) \, x \, \lambda(v^{-j} u^{-i})}_{\in I} \in I$$

$$\text{aber} \quad \ldots = \tau(x) \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad \tau(x) \cdot 1 \in I$$

$$\overset{\tau(x) \neq 0}{\Longrightarrow} \quad 1 \in I$$

$$\Rightarrow \quad I = C^*_{red}(\mathbb{F}_2) \qquad \square$$

<u>13.9. Korollar</u>: $C^*_{red}(\mathbb{F}_2)$ besitzt eindeutige Spur.

<u>Beweis</u>: Sei $\tilde{\tau}$: $C^*_{red}(\mathbb{F}_2)$ Spur, $x \in C^*_{red}(\mathbb{F}_2)$

$$\Rightarrow \tilde{\tau}(x) = \tilde{\tau}\left[\lambda(u^i v^j) \, x \, \lambda(v^{-j} u^{-i})\right] \quad \forall i,j \text{ da Spur}$$

$$= \tilde{\tau}\Big[\underbrace{\frac{1}{mn} \sum_{i,j} \lambda(u^i v^j) \, x \, \lambda(v^{-j} u^{-i})}_{\longrightarrow \tau(x) \cdot 1}\Big]$$

$$\longrightarrow \tau(x) \cdot \tilde{\tau}(1) = \tau(x)$$

$$\Rightarrow \tilde{\tau}(x) = \tau(x) \qquad \forall x \in C^*_{red}(\mathbb{F}_2) \qquad \square$$

<u>13.10. Korollar</u>: $C^*_{red}(\mathbb{F}_2) \not\cong C^*(\mathbb{F}_2)$

(und $\mathbb{F}_2$ somit nicht amenable).