

Exkurs: universelle C^* -Algebren

Erinnerung/Motivation:

Will man Operatoren $x \in \mathcal{B}(H)$ untersuchen, ist es hilfreich die von x erzeugte $*$ -Algebra $*\text{-alg}(x) \subseteq \mathcal{B}(H)$ zu betrachten (also Polynome in x und x^*).

Noch besser: einen Abschluss davon

$$C^*(x) = \overline{*\text{-alg}(x)}^{\|\cdot\|} = \overline{\{\text{Polynome in } x \text{ und } x^*\}}^{\|\cdot\|} \subseteq \mathcal{B}(H)$$

$$W^*(x) = \overline{*\text{-alg}(x)}^{\|\cdot\|_{st}} = \overline{\{\text{Polynome in } x \text{ und } x^*\}}^{\|\cdot\|_{st}} \subseteq \mathcal{B}(H)$$

(wobei $W^*(x)$ der Abschluss in der starken Operatortopologie ist, siehe Funkt. Analysis, Blatt 12)

Vorteil: habe Funktionalcalculus zur Verfügung, also $\sqrt{x}$, $x_+ - x_-$, etc.

großes Fundamentalthemem der C^* -Algebren:

Die Struktur der C^* -Algebren ist axiomatisierbar,

also: Eine C^* -Algebra ist eine Banachalgebra (also

Algebra mit $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$, vollständig) mit Involution

und $\|a^*a\| = \|a\|^2$.

Und: Jede C^* -Algebra besitzt eine treue Darstellung,

d.h. sie ist isomorph zu einer C^* -Unteralgebra von $\mathcal{B}(H)$.

Somit: axiomatische Definition $\Leftrightarrow$ konkrete Definition

Die axiomatische Definition bietet uns einen sehr abstrakten und "reinen" Zugang zu C^* -Algebren bzw. C^* -algebraischen Relationen.

U.1 Konstruktion einer universellen C^* -Algebra:

- $E = \{x_i \mid i \in I\}$ eine Menge von Erzeugern
 - $P(E) = \text{Span} \{x_{i_1}^{a_1} x_{i_2}^{a_2} \dots x_{i_k}^{a_k} \mid \dots\}$ involutive Algebra der nichtkommutativen Polynome in $E \cup E^*$ ($(\lambda x y)^* = \bar{\lambda} y^* x^*$ etc.)
 - $R \subseteq P(E)$ eine Menge von Relationen
 - $J(R) \subseteq P(E)$ das von R erzeugte beidseitige Ideal in $P(E)$
 - $A(E, R) := \frac{P(E)}{J(R)}$ die universelle C^* -Algebra mit Erzeugern E und Relationen R
 - $\|x\| := \sup \{p(x) \mid p \text{ ist } C^*\text{-Halbnorm auf } A(E, R)\}$ für $x \in A(E, R)$. p ist C^* -Halbnorm, falls $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$, $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, $p(xy) \leq p(x)p(y)$, $p(x^*x) = p(x)^2$.
 - Ist $\|x\| < \infty$ für alle $x \in A(E, R)$, so setze

$$C^*(E|R) := \frac{A(E, R)}{\{x \in A(E, R) \mid \|x\| = 0\}}$$

Vervollständigung
- die universelle C^* -Algebra mit Erzeugern E und Relationen R .

- U.2 Bemerkung: (a) Eine Relation $x_2 x_3 = x_4^2$ ist also zunächst ein Polynom $x_2 x_3 - x_4^2 \in R$, das dann herausgeteilt wird. Man teilt das Ideal heraus, damit auch $x_5 x_2 x_3 = x_5 x_4^2$ etc.
- (b) Das Ideal bei $C^*(E|R)$ ist also: Nehme Polynome in $\{x_i, x_i^*\}$ mit Relationen $\{x_2 x_3 = x_4^2, \dots\}$ und platze sie mit einer Norm aus. Dazu muss der Nullraum $\{\|x\|=0\}$ herausgeteilt und schließlich abgeschlossen werden. (vgl. 1.22)

(c) Die universelle C^* -Algebra $C^*(E|R)$ hat die folgende sehr wichtige universelle Eigenschaft:

Ist B eine C^* -Algebra mit Elementen $y_i \in B, i \in I$, die die Relationen R erfüllen, so gibt es genau einen $*$ -Hom.
 $\varphi: C^*(E|R) \rightarrow B$ mit $\varphi(x_i) = y_i$

$$\left[\begin{array}{l} A(E, R) \xrightarrow{\varphi_0 \text{ Universale Eigenschaft}} B \\ \downarrow \text{d.h.} \\ C^*(E|R) \end{array} \right. \begin{array}{l} \xrightarrow{\varphi \text{ Fortsetzung}} \\ \varphi_0 \text{ stetig nach Definition von } \|\cdot\| \text{ auf } C^*(E|R) \end{array}$$

(d) Gibt es eine Konstante $C > 0$ mit $p(x_i) \leq C$ für jede C^* -Norm p auf $A(E, R)$ und alle $i \in I$, so gilt $\|x\| < \infty \quad \forall x \in A(E, R)$ und $C^*(E|R)$ existiert.

$$\left[\|x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_k^{a_k}\| \leq C^{a_1 + a_2 + \dots + a_k} < \infty \text{ für jedes Monom } \sim \text{ Polynom} \right]$$

U.3 Beispiel: Die universelle C^* -Algebra $C^*(u, 1 \mid u^*u = uu^* = 1)$, die von einem Unitären erzeugt wird ist isomorph zu den stetigen Funktionen $C(S^1)$ auf $S^1 = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$

Beweis: • In $C^*(u, 1, \dots)$ sind auch noch Relationen $1u = u = u1 \dots$

• $C^*(u, 1, \dots)$ ex., da $p(u)^2 = p(u^*u) = p(1) \leq 1 \quad \forall p$

• $z(t) = t$ in $C(S^1)$ und $1(t) \equiv 1$ erfüllen die Relationen,

also ex. $\varphi: C^*(u, 1) \rightarrow C(S^1)$ mit $\varphi(u) = z, \varphi(1) = 1$

• φ surjektiv nach Stone-Weierstraß

• andererseits $C^*(u, 1) \cong C(\text{Sp } u)$ mit $\text{Sp } u \subseteq S^1$ nach Gelfand und Blatt 10 der Funktionalanalysis

• Also ex. $\psi: C(S^1) \rightarrow C(\text{Sp } u) \xrightarrow{\cong} C^*(u, 1)$
 $f \mapsto f|_{\text{Sp } u} \mapsto f(u)$

(Injektivität) und $\psi \circ \varphi = \text{id}_{C^*(u, 1)}$, da $\varphi \circ \psi(u) = u$

Somit ist φ auch bijektiv.

□

U.4 Bemerkung: $C^*(x \mid x=x^*)$ existiert nicht, da es s.a. Elemente beliebig großer Norm gibt, also $\|x\| = \infty$.

U.5 Beispiel: Für $n \geq 2$ sind isomorph:

(i) $M_n(\mathbb{C})$

(ii) $C^*(e_{ij} \mid i,j=1,\dots,n \mid e_{ij}^* = e_{ji}, e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il} \quad \forall i,j,k,l)$

(iii) $C^*(x_1, \dots, x_n \mid x_i^* x_j = \delta_{ij} x_1)$

Beweis: (ii) $\cong$ (iii): $E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad i \in M_n(\mathbb{C})$ erfüllen die Relationen

von (ii), also ex. $\varphi: C^*(e_{ij} \mid \dots) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ und ist surj.

($C^*(e_{ij} \mid \dots)$ ex.: $p(e_{ij})^2 = p(e_{ij}) \in [0,1], p(e_{ij})^2 = p(e_{ij}) \leq 1$)

$C^*(e_{ij} \mid \dots)$ ist n^2 -dimensional, da alle Monome der Form e_{ij} sind. $M_n(\mathbb{C})$ ebenfalls n^2 -dim. $\Rightarrow \varphi$ inj.

(ii) $\cong$ (iii): $C^*(e_{ij} \mid \dots) \xrightarrow{\varphi} C^*(x_1, \dots, x_n \mid \dots) \xrightarrow{\psi} C^*(e_{ij} \mid \dots)$
 $e_{ij} \mapsto x_i x_j^*, x_i \mapsto e_{i1}$

mit $\varphi \circ \psi = \text{id}_{C^*(x_1, \dots, x_n)}, \psi \circ \varphi = \text{id}_{C^*(e_{ij})}$

□

U.6 Bemerkung: Da $M_n(\mathbb{C})$ einfach ist, ist jeder Isomorphismus $\varphi: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{B}$ injektiv, d.h. $M_n(\mathbb{C}) \cong C^*(f_{ij} \mid 1 \leq i,j \leq n) \in \mathcal{B}$ wenn immer $f_{ij} \in \mathcal{B}$ existieren, die obige Relationen erfüllen.

U.7 Beispiel: Es sind isomorph:

(i) $\mathcal{K}(H)$ die kompakten Operatoren, H separabel

(ii) $C^*(e_{ij} \mid i,j \in \mathbb{N} \mid e_{ij}^* = e_{ji}, e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il} \quad \forall i,j,k,l)$

(iii) $C^*(x_i \mid i \in \mathbb{N} \mid x_i^* x_j = \delta_{ij} x_1)$

Beweis: (i) $\cong$ (ii): Ist $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ONB so erfüllen $f_{ij} := w_{ij} e_i$

von Blatt 2 (also $w_{ij} e_j(e_k) := \langle e_k, e_j \rangle e_i = \delta_{kj} e_i$) die Relationen aus (ii). Also ex. $\varphi: C^*(e_{ij}) \rightarrow \mathcal{K}(H)$ surj.

Und $\varphi|_{M_n}: M_n \subset C^*(e_{ij} \mid i,j=1,\dots,n) \rightarrow \mathcal{K}(H)$ injektiv,

den Kern $\varphi|_{M_n} \in M_n \subset M_n(\mathbb{C})$ bildet. Also ist φ Isomorphismus

auf der dichten Teilmenge $UM \subseteq C^*(e_{ij}, i, j \in \mathbb{N})$
und somit auch auf ganz $C^*(e_{ij}, i, j \in \mathbb{N})$.

(ii) $\cong$ (iii): wie in U.5

□

U.8 Bemerkung: Auch $K(H)$ ist einfach.

[Nach Blatt 5: Ist $0 \neq I \subseteq K(H)$ ein Ideal, so ist I auch ein Ideal in $B(H)$ (nach 3.8) und also $K(H) \subseteq I$.

U.9 Beispiel: Setze $J := C^*(v, 1 \mid v^*v = 1)$, die universelle C^* -Algebra, die von einer Isometrie erzeugt wird, die Toeplitz-Algebra.

Dann gilt:

- Es ex. $\varphi: J \twoheadrightarrow \mathcal{L}(S^1)$ surjektiv, $\varphi(v) = U$
- $\varphi: J \rightarrow C^*(S) \subseteq B(\ell_2(\mathbb{N}_0))$ mit $\varphi(v) = S$ ist ein Isomorphismus, wobei $S e_n = e_{n+1}$ (Shift)
- Der Kern von φ ist gegeben durch das von $1-vv^*$ erzeugte Ideal $\langle 1-vv^* \rangle \subseteq J$, das isomorph ist zu $K(H)$.

Um wieviel unterscheiden sich die Isometrie und die Unitäre?
Um $K(H)$.

Beweisidee: $\{v^i(1-vv^*)v^{*j} \mid i, j \in \mathbb{N}_0\}$ erfüllen die

Relationen von $C^*(e_{ij}, i, j \in \mathbb{N}_0) \cong K(H)$

und andererseits: $\langle 1-vv^* \rangle = \overline{\text{span}}\{v^i(1-vv^*)v^{*j} \mid i, j \in \mathbb{N}_0\}$

Also: $K(H) \cong \langle 1-vv^* \rangle$.

Verfahren

$$\begin{array}{ccc} J & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{L}(S^1) \\ \searrow \varphi & \hookrightarrow & \swarrow \varphi \\ & J / \langle 1-vv^* \rangle & \end{array} \quad \text{mit } \varphi(u) = \varphi(v), \text{ da } \varphi(v) \text{ unitär.}$$

und also $x \in \text{Kern}(\varphi) \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(y) = 0$, d.h. $x \in \langle 1-vv^* \rangle$.

Außerdem $\langle 1-vv^* \rangle \subseteq \text{Kern}(\varphi$, da $\varphi(v^i(1-vv^*)v^{*j}) = 0 \quad \forall i, j$ □