



Übungen zur Vorlesung Operatoralgebren
Sommersemester 2014

Blatt 1

Abgabe: Donnerstag, 24.4.2014, 10:00 Uhr
in den Briefkästen beim Zeichensaal oder in Jonas Wahls Büro (Zi. 215)

Aufgabe 1 (20! Punkte). Sei A eine nicht-unitale C^* -Algebra.

- (a) Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 1.10 der Vorlesung. Zeigen Sie also, dass die assoziierte Multiplikatoralgebra $M(A)$ eine unitale C^* -Algebra ist und dass

$$A \rightarrow M(A), \quad a \mapsto (L_a, R_a)$$

ein isometrischer $*$ -Homomorphismus ist. Zeigen Sie auch, dass A in $M(A)$ ein Ideal ist.

Eine nicht-unitale C^* -Algebra lässt sich also immer (als ein Ideal) in eine unitale C^* -Algebra einbetten.

- (b) Zeigen Sie, dass die Multiplikatoralgebra die *größte* Unitalisierung von A ist:
Ist B eine unitale C^* -Algebra und ist $A \subset B$ als ein Ideal eingebettet, dann gibt es einen $*$ -Homomorphismus von B nach $M(A)$, der die Einbettung $A \subset M(A)$ fortsetzt.
- (c) Zeigen Sie, dass die Konstruktion \tilde{A} von Satz 1.12 der Vorlesung die *kleinste* Unitalisierung einer nicht-unitalen C^* -Algebra A ist:
Ist B eine unitale C^* -Algebra und ist $A \subset B$ als ein Ideal eingebettet, dann gibt es einen $*$ -Homomorphismus von \tilde{A} nach B , der die Einbettung $A \subset B$ fortsetzt.

Aufgabe 2 (20! Punkte). Sei Ω ein lokalkompakter Hausdorff-Raum und sei $A = \mathcal{C}_0(\Omega)$.

- (a) Zeigen Sie, dass A nicht unital ist, falls Ω nicht kompakt ist.
- (b) Zeigen Sie, dass die Multiplikatoralgebra $M(A)$ die Algebra $\mathcal{C}_b(\Omega)$ der beschränkten, stetigen Funktionen auf Ω ist.
- (c) Die *Einpunkt-Kompaktifizierung* von Ω ist gegeben durch die Menge $\Omega^+ := \Omega \cup \{\infty\}$ zusammen mit der folgenden Topologie: Eine Menge $U \subset \Omega^+$ ist eine Umgebung von $x \in \Omega$ genau dann, wenn $U \cap \Omega$ eine Umgebung von x ist. Eine Menge $U \subset \Omega^+$ ist eine Umgebung von ∞ genau dann, wenn U das Komplement einer kompakten Menge in Ω enthält.

Zeigen Sie, dass Ω^+ kompakt ist und dass \tilde{A} isomorph ist zu $\mathcal{C}(\Omega^+)$.