UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Operatoralgebren
Sommersemester 2014

Blatt 2
Abgabe: Freitag, 2.5.2014, 10:00 Uhr
in den Briefkästen beim Zeichensaal oder in Jonas Wahls Büro (Zi. 215)

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass die Multiplikatoralgebra $M(\mathcal{K}(H))$ der kompakten Operatoren genau die Algebra der beschränkten Operatoren $B(H)$ auf demselben (separablen) Hilbertraum H ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Sei A eine C^*-Algebra.

(a) Ein Element $p \in A$ heißt *Projektion*, falls $p = p^* = p^2$ gilt. Berechnen Sie das Spektrum $\sigma(p)$ $(= \mathrm{Sp(p)})$ einer Projektion $p \in A$.

(b) Sei A unital. Ein Element $v \in A$ heißt *Symmetrie*, falls $v = v^*$ und $v^2 = 1$ gilt. Berechnen Sie das Spektrum $\sigma(v)$ einer Symmetrie $v \in A$.

(c) Welchen Zusammenhang gibt es zwischen Projektionen und Symmetrien?

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Sei Z ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $M \subset Z$ heißt *nicht zusammenhängend*, falls es zwei nicht-leere, disjunkte, abgeschlossene Teilmengen X und Y gibt, so dass $M = X \cup Y$ ist.
Sei A eine kommutative C^*-Algebra mit Eins. Zeigen Sie, dass A eine Projektion enthält genau dann, wenn das Spektrum $\Omega(A)$ (der Raum der Charaktere) nicht zusammenhängend ist.

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Sei A eine C^*-Algebra und seien $x, h \in A$ zwei selbstadjungierte Elemente mit $h \geq 0$ und $h \geq x$. Der positive Teil x_+ von x ist definiert per Funktionalkalkül als $x_+ := f_+(x)$, wobei $f_+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben ist durch $f_+(t) := \begin{cases} t & \text{falls } t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

(a) Zeigen Sie, dass $h \geq x_+$ ist, falls A kommutativ ist.

(b) Zeigen Sie, dass im Allgemeinen $h \ngeq x_+$ ist, falls A nicht kommutativ ist. Geben Sie dazu ein Gegenbeispiel mit $A = M_2(\mathbb{C})$ an.