UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Operatoralgebren
Sommersemester 2014

Blatt 3
Abgabe: Donnerstag, 15.5.2014 (!), 10:00 Uhr
in den Briefkästen beim Zeichensaal oder in Jonas Wahls Büro (Zi. 215)

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Beweisen Sie die Aussage von Bemerkung 2.3: Sei A eine (nicht notwendigerweise unitale) C^*-Algebra, $B \subset A$ eine C^*-Unteralgebra und $a \in B$. Zeigen Sie, dass $\sigma_A(a) \cup \{0\} = \sigma_B(a) \cup \{0\}$ gilt.
Diskutieren Sie auch die Spezialfälle wenn A und/oder B unital sind: (i) A und B unital mit derselben Eins, (ii) A und B unital mit verschiedenen Einsen, (iii) nur A oder nur B unital.

Aufgabe 2 ($10 + 5^*$ Punkte)**.** Sei H ein Hilbertraum und sei $x \in B(H)$. Wir definieren $|x| := \sqrt{x^*x}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\ker|x| = \ker(x)$ ist und dass die Abbildung $\Psi : \mathrm{Bild}|x| \to \mathrm{Bild}(x)$, $|x|\xi \mapsto x\xi$ wohldefiniert und isometrisch ist.

(b) Zeigen Sie, dass eine isometrische Fortsetzung $v : (\ker(x))^\perp \to \overline{\mathrm{Bild}(x)}$ von Ψ existiert, so dass $v\xi = 0$ für alle $\xi \in \ker(x)$ gilt. Zeigen Sie, dass v eine *partielle Isometrie* ist, dass also $v = vv^*v$ gilt und v^*v die Projektion auf $(\ker(x))^\perp$ sowie vv^* die Projektion auf $\overline{\mathrm{Bild}(x)}$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass sich x als $x = v|x|$ schreiben lässt, wobei v die partielle Isometrie von $(\ker(x))^\perp$ nach $\overline{\mathrm{Bild}(x)}$ ist. Zeigen Sie auch, dass v eindeutig bestimmt ist. Diese Zerlegung von v heißt *Polarzerlegung*.

(d)* Zeigen Sie, dass v unitär ist (also $v^*v = vv^* = 1$), falls x normal und invertierbar ist. Zeigen Sie auch, dass dann $v \in C^*(x, 1)$ ist. Finden Sie ein Beispiel eines normalen Operators $x \in B(H)$, dessen Polarzerlegung $v \notin C^*(x, 1)$ erfüllt.

bitte wenden

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** (siehe Beispiel 3.5 der Vorlesung)

(a) Seien $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen in $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ mit $f_n(x) = 1$ für $|x| < n$. Zeigen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine approximierende Eins für $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Projektionen p_n auf die ersten n Basisvektoren eines separablen Hilbertraums eine approximierende Eins für die Algebra der kompakten Operatoren $\mathcal{K}(H)$ bilden.

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Sei $L^\infty([0,1])$ der Raum der Borel-messbaren, beschränkten Funktionen auf $[0,1]$. Hierbei werden zwei Funktionen f und g identifiziert, falls $\{t \in [0,1] \mid f(t) = g(t)\}$ eine Nullmenge bzgl. des Lebesguemaßes ist.

(a) Zeigen Sie, dass der Raum $L^\infty([0,1])$ versehen mit der Supremumsnorm eine kommutative C^*-Algebra ist.

(b) Zeigen Sie, dass der Raum $\Omega(L^\infty([0,1]))$ der Charaktere *total unzusammenhängend* ist: Eine Menge A heißt *zusammenhängend*, falls man sie *nicht* als disjunkte Vereinigung zweier (nicht leerer) Mengen schreiben kann, die in der Relativtopologie offen sind. Zeigen Sie nun, dass die Einpunktmengen $\{\varphi\}$ die einzigen zusammenhängenden Mengen in $\Omega(L^\infty([0,1]))$ sind.

Für den Fall $L^\infty([0,1])$ ist die isomorphe C^*-Algebra $\mathcal{C}(\Omega(L^\infty([0,1])))$ also nicht sehr schön.