UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Operatoralgebren
Sommersemester 2014

Blatt 4
Abgabe: Donnerstag, 22.5.2014, 10:00 Uhr
in den Briefkästen beim Zeichensaal oder in Jonas Wahls Büro (Zi. 215)

Aufgabe 1 (10 Punkte). (a) Zeigen Sie, dass die C^*-Algebra $M_n(\mathbb{C})$ der komplexwertigen $n \times n$-Matrizen *einfach* ist: Ist I ein abgeschlossenes Ideal in $M_n(\mathbb{C})$, so ist $I = \{0\}$ oder $I = M_n(\mathbb{C})$.

(b) Zeigen Sie, dass $\ker \varphi$ ein Ideal in einer C^*-Algebra A ist, wenn B eine weitere C^*-Algebra und $\varphi : A \to B$ ein *-Homomorphismus ist.

(c) Zeigen Sie, dass es keine *-Homomorphismen von $M_n(\mathbb{C})$ nach $\mathbb{C}$ gibt, wenn $n \geq 2$.

Aufgabe 2 (10 Punkte). Ist $h \in M_n(\mathbb{C})$, so definieren wir $\tau_h : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ durch $\tau_h(x) := \mathrm{tr}(hx)$, wobei $\mathrm{tr} : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ die normalisierte Spur ist, also $\mathrm{tr}(x) = \frac{1}{n}\sum_i x_{ii}$ für $x = (x_{ij})$. Zeigen Sie, dass τ_h ein positives lineares Funktional ist mit $\|\tau_h\| = \mathrm{tr}(h)$, wenn h positiv ist. Zeigen Sie auch, dass *jedes* positive lineare Funktional auf $M_n(\mathbb{C})$ von dieser Form ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte). Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 4.7 der Vorlesung: Sei τ ein beschränktes Funktional auf einer C^*-Algebra A. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) τ ist positiv.

(ii) Für jede approximierende Eins $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ von A gilt $\|\tau\| = \lim_\lambda \tau(u_\lambda)$.

(iii) Es gibt eine approximierende Eins $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ von A, so dass gilt $\|\tau\| = \lim_\lambda \tau(u_\lambda)$.

Aufgabe 4 (10 Punkte). Sei H ein separabler Hilbertraum und $I \neq 0$ ein abgeschlossenes Ideal in $B(H)$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{K}(H) \subseteq I$ gilt. (Betrachten Sie zunächst Operatoren $\xi \mapsto \langle \xi, \zeta\rangle \eta$ für feste Vektoren $\zeta, \eta \in H$). Man kann sogar zeigen, dass $\mathcal{K}(H)$ das einzige eigentliche abgeschlossene Ideal von $B(H)$ ist. Folgern Sie, dass die Calkin-Algebra $C(K) = B(H)/\mathcal{K}(H)$ einfach ist. Hat $B(H)$ noch weitere *nicht* abgeschlossene Ideale?