UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Operatoralgebren
Sommersemester 2014

Blatt 5 – Teil 2
Abgabe: Donnerstag, 5.6.2014 (!), 10:00 Uhr
in den Briefkästen beim Zeichensaal oder in Jonas Wahls Büro (Zi. 215)

Aufgabe 1. Siehe Blatt 5 – Teil 1

Aufgabe 2. Siehe Blatt 5 – Teil 1

Aufgabe 3 (10+5* Punkte)**.** Zwei Projektionen p und q einer C^*-Algebra A heißen *(Murray-von-Neumann-) äquivalent* ($p \sim q$), falls es ein Element $u \in A$ gibt, so dass $p = u^*u$ und $q = uu^*$ gilt. (Def. 7.5)

(a) Sei $A = B(H)$. Zeigen Sie, dass p und q äquivalent sind, genau dann, wenn pH und qH die gleiche Dimension haben (Lemma 7.8). (Diese Äquivalenz gilt übrigens **nicht**, wenn $A \subsetneq B(H)$ ist!)

(b) Zeigen Sie, dass zwei minimale Projektionen in $M_n(\mathbb{C})$ immer äquivalent sind (Lemma 7.12).

(c) Sei $A = M_n(\mathbb{C})$ und $\pi : A \to B(H)$ eine nicht-entartete Darstellung von A. Zeigen Sie, dass die *Vielfachheit der Darstellung* $m_\pi := \dim \pi(p)H$ unabhängig von der Wahl einer minimalen Projektion $p \in A$ ist und dass $\dim H = nm_\pi$ erfüllt. (Satz 7.13)

(d*) Zeigen Sie, dass aus $m_{\pi_1} = m_{\pi_2}$ schon folgt, dass π_1 und π_2 unitär äquivalent sind. Folgern Sie, dass $M_n(\mathbb{C})$ bis auf unitäre Äquivalenz nur eine einzige irreduzible Darstellung besitzt.

Aufgabe 4 (10+5* Punkte)**.** (a) Überprüfen Sie, dass die Definition 8.2 von Hilbert-Schmidt-Operatoren mit der von Blatt 9 der Vorlesung Funktionalanalysis übereinstimmt.

(b) Sei ρ_x ein lineares Funktional auf $\mathcal{K}(H)$, $\rho_x(y) := \mathrm{tr}(xy)$. Charakterisieren Sie, wann ρ_x positiv ist, wann ρ_x ein Zustand ist und wann ρ_x ein reiner Zustand ist. (Korollar 8.17 und Satz 8.18)

(c*) Zeigen Sie, dass $\mathcal{K}(H)$ bis auf unitäre Äquivalenz nur eine einzige irreduzible Darstellung besitzt. (Satz 8.19)