UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Operatoralgebren
Sommersemester 2014

Blatt 6
Abgabe: Donnerstag, 12.6.2014, 10:00 Uhr
in den Briefkästen beim Zeichensaal oder in Jonas Wahls Büro (Zi. 215)

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Sind die Abbildungen $x \mapsto x^*$ und $x \mapsto \|x\|$ (für $x \in L(H)$) bezüglich der schwachen Operatortopologie (WOT) stetig? Beweis oder Gegenbeispiel.
Zeigen Sie auch, dass die Abbildung $x \mapsto x^*$ eingeschränkt auf normale Operatoren stetig ist in der starken Operatortopologie (SOT).

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Zeigen Sie: Die Menge $A_0 := \{f \in C_0(\mathbb{R}) \mid f \text{ ist stark stetig}\}$ ist abgeschlossen in $C_0(\mathbb{R})$ bzgl. der Supremumsnorm (vgl. Satz 9.10).
Zeigen Sie auch, dass die Funktion f gegeben durch $f(z) = 1/(1+z^2)$ ein Element von A_0 ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass man jedes Element in einer Von-Neumann-Algebra als Linearkombination von unitären Elementen schreiben kann. Betrachten Sie dafür zunächst den Fall von selbstadjungierten Elementen mit Norm kleiner gleich Eins und benutzen Sie den Funktionalkalkül.
Gilt diese Aussage auch für unitale C^*-Algebren?

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Sei $M \subset L(H)$ eine Teilmenge mit $x^* \in M$ für alle $x \in M$. Zeigen Sie, dass die Bikommutante M'' von M eine Von-Neumann-Algebra ist. Wir schreiben dann auch $M'' = W^*(M)$ für die von M *erzeugte Von-Neumann-Algebra* bzw. für die *einhüllende Von-Neumann-Algebra*. Gilt die Aussage auch für beliebige Teilmengen M?
Zeigen Sie auch, dass die Algebra $\mathcal{K}(H)$ der kompakten Operatoren keine Von-Neumann-Algebra ist und bestimmen Sie die einhüllende Von-Neumann-Algebra.