UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Operatoralgebren
Sommersemester 2014

Blatt 7
Abgabe: Donnerstag, 26.6.2014, 10:00 Uhr
in den Briefkästen beim Zeichensaal oder in Jonas Wahls Büro (Zi. 215)

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Sei $\mathcal{M} \subset B(H)$ eine abelsche Von-Neumann-Algebra. Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}$ genau dann maximal abelsch ist, wenn $\mathcal{M}' = \mathcal{M}$ gilt.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Sei K ein kompakter Hausdorffraum und μ ein endliches Borel-Maß auf K. (Zur Vereinfachung kann auch einfach $K = [0,1]$ und μ als Einschränkung des Lebesgue-Maßes genommen werden.) Wir betrachten dann die von den Multiplikationsoperatoren M_f für $f \in C(K)$ erzeugte kommutative C^*-Algebra A. Zeigen Sie die Behauptungen aus Beispiel 9.19 der Vorlesung:

(a) $\mathcal{M} := A' = \{M_f | f \in L^\infty(K, \mu)\}$

(b) $\mathcal{M}' = \mathcal{M}$, d.h. $\mathcal{M}$ is maximal abelsch

(c) die konstante Funktion 1 ist zyklisch und separierend für $\mathcal{M}$

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Sei $\mathcal{M}$ eine Von-Neumann-Algebra, so dass 1 eine endliche Projektion ist. Zeigen Sie:

(a) Alle Projektionen in $\mathcal{M}$ sind endlich.

(b) Sind e und f äquivalente Projektionen, so sind auch $1 - e$ und $1 - f$ äquivalent.

(c) Sind e und f äquivalent, so gibt es ein Unitäres $u \in \mathcal{M}$, so dass $f = ueu^*$.

(d) Die Aussagen (b) und (c) sind falsch, falls $\mathcal{M}$ eine Von-Neumann-Algebra ist, so dass 1 *nicht* endlich ist. *Tipp:* Benutzen Sie den Shift.

bitte wenden

Aufgabe 4 (10+10* Punkte)**.** Sei $\mathcal{M}$ eine Von-Neumann-Algebra und sei $p \in \mathcal{M}$ eine Projektion. Zeigen Sie:

(a) Sowohl $p\mathcal{M}p \subset B(pH)$ als auch $p\mathcal{M}'p \subset B(pH)$ sind Von-Neumann-Algebren.

(b) Ist $\mathcal{M}$ ein Faktor, so ist auch $p\mathcal{M}p$ ein Faktor.

Tipp: Widerspruchsbeweis. Argumentieren Sie zunächst mit Hilfe des Funktionalkalküls, dass Sie eine Projektion f im Zentrum von $p\mathcal{M}p$ finden, die kein skalares Vielfaches von p ist. Folgern Sie, dass dann $fM(p-f) = 0$ ist – ein Widerspruch.

(c*) Ist $\mathcal{M}$ ein Faktor vom Typ I, II oder III, so ist $\mathcal{M}$ ein Faktor vom selben Typ.

Aufgabe 5 (10+10* Punkte)**.** (a) Sei $\mathcal{M}_1 = L^\infty([0,1],\lambda)$ und $\mathcal{M}_2 = L^\infty([7,13],\lambda)$ (jeweils versehen mit der Einschränkung des Lebesguemaßes λ). Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ $*$-isomorph sind. Zeigen Sie das gleiche für zwei beliebige L^∞-Räume, deren Maße keine Atome besitzen (ein Atom ist ein Punkt t, so dass die Einpunktmenge $\{t\}$ positive Masse besitzt unter dem Maß μ, also $\mu(\{t\}) > 0$).

(b) Sei nun $\mathcal{M}_1 = L^\infty([0,1],\lambda)$ wie oben und $\mathcal{M}_3 = L^\infty([0,1],\nu)$ wobei

$$\nu = \frac{1}{2}(\lambda + \delta_0)$$

ein Atom der Masse 1/2 besitzt. Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_3$ nicht $*$-isomorph sind.

(c*) Betrachten Sie nun diskrete Maße. Welche Eigenschaften (Anzahl der Atome, Lage, Masse) entscheiden darüber, ob solche zwei L^∞-Räume $*$-isomorph sind oder nicht. Können Sie eine allgemeine Klassifizierung von separablen kommutativen Von-Neumann-Algebren angeben?