UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Operatoralgebren
Sommersemester 2014

Blatt 8
Abgabe: Donnerstag, 3.7.2014, 10:00 Uhr
in den Briefkästen beim Zeichensaal oder in Jonas Wahls Büro (Zi. 215)

Aufgabe 1 (10+10* Punkte)**.** In der Vorlesung wurde eingeführt, wie man zu einer diskreten Gruppe G eine Von-Neumann-Algebra $L(G)$ assoziiert. Wir betrachten die Permutationsgruppe S_3, die ja bekanntlich $3! = 6$ Elemente hat. Welche Dimension hat die Von-Neumann-Algebra $L(S_3)$? Wie lässt sie sich schreiben? Betrachten Sie auch $L(S_4)$.
Zusatz: Welche Rolle spielen die irreduziblen Darstellungen der Gruppen S_3 bzw. S_4?

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass $L(\mathbb{Z})$ eine kommutative Von-Neumann-Algebra ist. Geben Sie einen Maßraum (X, μ) an, so dass $L(\mathbb{Z}) \cong L^\infty(X, \mu)$ gilt.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Wir betrachten den einseitigen Shift $S : \ell^2(\mathbb{N}_0) \to \ell^2(\mathbb{N}_0)$ gegeben durch $Se_n := e_{n+1}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Operatoren $X_{ij} := S^i(1 - SS^*)S^{*j}$ Rang-Eins-Operatoren sind.

(b) Schließen Sie, dass die Algebra der kompakten Operatoren $\mathcal{K}(\ell^2(\mathbb{N}_0))$ in der von S erzeugten C^*-Algebra $C^*(S) \subset B(\ell^2(\mathbb{N}_0))$ enthalten ist.

(c) Zeigen Sie, dass die von S erzeugte Von-Neumann-Algebra $W^*(S) \subset B(\ell^2(\mathbb{N}_0))$ schon ganz $B(\ell^2(\mathbb{N}_0))$ ist. Wir sehen also, dass $B(\ell^2(\mathbb{N}_0))$ (als Von-Neumann-Algebra) von einem einzigen Operator erzeugt wird!

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Mit $\mathcal{C}([0,1], M_2(\mathbb{C}))$ bezeichnen wir die C^*-Algebra der stetigen Funktionen auf $[0,1]$ mit Werten in $M_2(\mathbb{C})$, versehen mit der Norm $\|f\| = \sup_{x\in[0,1]}\|f(x)\|$. Wir können übrigens $\mathcal{C}([0,1], M_2(\mathbb{C}))$ auch mit $M_2(\mathcal{C}([0,1]))$ identifizieren. Wir definieren $D \subset \mathcal{C}([0,1], M_2(\mathbb{C}))$ durch:

$$D := \{f \in \mathcal{C}([0,1], M_2(\mathbb{C})) \mid f(0) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } f(1) = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix}, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}\}$$

Weiterhin definieren wir $\hat{p}(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $\hat{q}(t) := \begin{pmatrix} c^2(t) & s(t)c(t) \\ s(t)c(t) & s^2(t) \end{pmatrix}$, wobei $s(t) := \sin(\frac{\pi}{2}t)$ und $c(t) := \cos(\frac{\pi}{2}t)$, $t \in [0,1]$. Zeigen Sie, dass $\hat{p}$ und $\hat{q}$ zwei kommutierende Projektionen in D sind, die D erzeugen, dh. $C^*(\hat{p}, \hat{q}) = D$.