**UNIVERSITÄT DES SAARLANDES**
**FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK**
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Moritz Weber

**Übungen zur Vorlesung Operatoralgebren**
Sommersemester 2014

**Blatt 9**
**Abgabe:** Donnerstag, 10.7.2014, 10:00 Uhr
in den Briefkästen beim Zeichensaal oder in Jonas Wahls Büro (Zi. 215)

---

**Aufgabe 1** (**20** Punkte)**.** $M_n(\mathbb{C})$ und $\mathcal{K}(H)$ als universelle $C^*$-Algebren (Bsp. 12.6, 12.8).

(a) Zeigen Sie, dass die universellen $C^*$-Algebren aus Bsp. 12.6(ii) und (iii) sowie aus Bsp. 12.8(ii) und (iii) existieren (dass also die Halbnorm aus der Konstruktion 12.1 für alle Elemente beschränkt ist). Zeigen Sie dafür u.a., dass $x_1$ eine Projektion ist.

(b) Finden Sie zwei $^*$-Homomorphismen

$$\varphi : C^*(e_{ij}, i,j = 1,\ldots,n \mid e_{ij}^* = e_{ji}, e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}) \to C^*(x_1,\ldots,x_n \mid x_i^*x_j = \delta_{ij}x_1)$$
$$\psi : C^*(x_1,\ldots,x_n \mid x_i^*x_j = \delta_{ij}x_1) \to C^*(e_{ij}, i,j = 1,\ldots,n \mid e_{ij}^* = e_{ji}, e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il})$$

so dass $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{C^*(x_1,\ldots,x_n \mid \ldots)}$ und $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{C^*(e_{ij},i,j=1,\ldots,n \mid \ldots)}$. Folgeren Sie, dass die beiden universellen $C^*$-Algebren jeweils isomorph zu $M_n(\mathbb{C})$ sind. Übertragen Sie (b) auch auf den Fall $\mathcal{K}(H)$, also auf Beispiel 12.8.

(c) Sei $\langle 1-vv^*\rangle$ das von $1-vv^*$ erzeugte Ideal in der Toeplitzalgebra $\mathcal{T} = C^*(v|v^*v = 1)$. Zeigen Sie, dass der Abschluss $\mathcal{S}$ der Linearkombinationen von Elementen $v^i(1-vv^*)v^{*j}$ für $i,j \in \mathbb{N}_0$ ein Ideal in $\mathcal{T}$ ist und dass $\mathcal{S} = \langle 1-vv^*\rangle$ gilt. Zeigen Sie, dass $\langle 1-vv^*\rangle$ isomorph zu $\mathcal{K}(H)$ ist.

**Aufgabe 2** (**20** Punkte)**.** Universelle $C^*$-Algebren erzeugt von Projektionen.

(a) Finden Sie eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass $C^*(p,1 \mid p \text{ ist eine Projektion}) \cong \mathbb{C}^n$ und beweisen Sie den Isomorphismus. Hierbei ist 1 die Eins der $C^*$-Algebra auf der linken Seite, dh. die Relationen $1p = p1 = p$ gelten ebenfalls. Zeigen Sie auch $C^*(p,1 \mid p \text{ Proj.}) \cong C^*(s,1 \mid s \text{ ist eine Symmetrie})$. (Erinnerung: Blatt 2, A2.)

(b) Finden Sie eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass $C^*(p,q \mid p,q \text{ Proj.}, pq = qp) \cong \mathbb{C}^n$. Zu welchen Elementen in $A$ korrespondieren die Basisvektoren $e_i = (0,\ldots,0,1,0\ldots,0) \in \mathbb{C}^n$?

(c) Sei $D \subset \mathcal{C}([0,1], M_2(\mathbb{C}))$ die von $\hat{p}$ und $\hat{q}$ erzeugte $C^*$-Algebra von Blatt 8, Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass die von zwei nicht notwendigerweise kommutierenden Projektionen erzeugte universelle $C^*$-Algebra $B := C^*(p,q \mid p,q \text{ sind Proj.})$ isomorph ist zu $D$.

*Hinweis:* Zeigen Sie zunächst, dass jede irreduzible Darstellung von $B$ höchstens zweidimensional ist.