UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Operatoralgebren

Sommersemester 2014

Blatt 10 (das letzte)

Abgabe: Donnerstag, 17.7.2014, 10:00 Uhr
in den Briefkästen beim Zeichensaal oder in Jonas Wahls Büro (Zi. 215)

Aufgabe 1 (**20** Punkte)**.** Sei $\vartheta = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ rational.

(a) Finden Sie eine Darstellung von A_ϑ auf $M_q(\mathbb{C})$.

(b) Zeigen Sie, dass es unitale *-Homomorphismen $\varphi : A_\vartheta \to B$ und $\psi : A_\vartheta \to D$ gibt, so dass $\varphi(v^q) = 1$ und $\psi(v^q) \neq 1$.

(c) Folgeren Sie, dass A_ϑ nicht einfach ist.

(d) Zeigen Sie, dass u^q und v^q mit allen Elementen in A_ϑ kommutieren. Es gibt also einen *-Homomorphismus $\mathcal{C}(\mathbb{T}^2) \to C^*(u^q, v^q) \subseteq A_\vartheta$. (Dieser ist sogar ein Isomorphismus.)

Aufgabe 2 (**20** Punkte)**.** Betrachten Sie die universelle C^*-Algebra $\mathcal{E}_n$ definiert durch $\mathcal{E}_n := C^*(S_1, \dots, S_n, 1 \mid S_i^* S_j = \delta_{ij} 1)$, für $n \geq 2$. Zeigen Sie, dass die folgende kurze Sequenz exakt ist:

$$0 \to \mathcal{K}(H) \to \mathcal{E}_n \to \mathcal{O}_n \to 0$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass $1 - \sum_{i=1}^n S_i S_i^* \in \mathcal{E}_n$ eine Projektion ist. In der Beschreibung von $\mathcal{K}(H)$ als universelle C^*-Algebra kann $\mathbb{N}$ durch eine beliebige abzählbare Indexmenge ersetzt werden kann.

Zusatzaufgabe*. Erklären Sie dem Dozenten (genauer), wie die Rotationsalgebra A_ϑ mit dem Quanten-Hall-Effekt zusammenhängt.
Quellen:

- Alain Connes, *Noncommutative Geometry*, Kapitel 4.6.
- Bellissard, van Elst, Schulz-Baldes, *The noncommutative geometry of the quantum Hall effect*, J. Math. Phys. **35** (1994), 5373–5451.
- Gracia-Bondia, Varilly, Figueroa, *Elements of noncommutative geometry*, Kapitel 12 (Einleitung des Kapitels).
- Quellen [334] und [497] von Gracia-Bondia et al.