§6 positive lineare Funktionale und die GNS-Konstruktion

6.1 Definition: A C^*-Algebra, $\varphi: A \to \mathbb{C}$ lineares Funktional.
φ heißt positiv ($\varphi \geq 0$), falls $\varphi(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0$
(φ erhält also die Ordnungsstruktur: $x \leq y \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y)$)

6.2 Beispiele:
- $A = \mathcal{C}[0,1]$, $\varphi_t(f) = f(t)$ oder $\varphi(f) = \int_0^1 f(t)\,dt$
  allgemein: $\{$positive Funktionale$\} \overset{\text{bij}}{\longleftrightarrow} \{$Radon-Maße auf $[0,1]\}$
  $\varphi \longleftrightarrow \mu$ mit $\varphi(f) = \int_0^1 f(x)\,d\mu(x)$
- $A = M_n(\mathbb{C})$. $\tau: M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, $(a_{ij}) \mapsto \sum_{i=1}^n a_{ii}$ Spur
- $A = \mathcal{L}(H)$, $\xi \in H$. $\varphi_\xi(x) := (x\xi \mid \xi)$ für $x \in \mathcal{L}(H)$

6.3 Prop.: A C^*-Algebra, $\varphi: A \to \mathbb{C}$ positiv. Dann gilt:
(a) φ ist beschränkt (also stetig)
(b) φ ist involutiv (d.h. $\varphi(x^*) = \overline{\varphi(x)}$) und $|\varphi(x)|^2 \leq \|\varphi\| \, \varphi(x^*x)$ $\forall x \in A$

Bew.: (a) 1.) φ ist beschränkt auf $S := \{x \in A \mid x \geq 0, \|x\| \leq 1\}$
(Sonst gäbe es $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$ mit $\varphi(a_n) \geq 2^n$. Dann aber $a := \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} a_n$ positives Element nach 4.7 und $\varphi(a) \geq \sum_{n=1}^N \frac{1}{2^n}\varphi(a_n) \geq N \quad \forall N$ ↯)
2.) Für beliebiges $z \in A$ ist $z = (\mathrm{Re}\, z)_+ - (\mathrm{Re}\, z)_- + i(\mathrm{Im}\, z)_+ - i(\mathrm{Im}\, z)_-$
also z Linearkombination von positiven Elementen mit Norm kleiner gleich $\|z\|$. Somit $\|\varphi(z)\| \leq 4K\|z\|$, wobei K die Schranke aus 1.)

(b) $\langle x \mid y \rangle := \varphi(y^*x)$ ist eine positive Sesquilinearform
(d.h. $\langle \lambda x_1 + \mu x_2 \mid y \rangle = \lambda \langle x_1 \mid y \rangle + \mu \langle x_2 \mid y \rangle$, $\langle x \mid \lambda y_1 + \mu y_2 \rangle = \bar\lambda \langle x \mid y_1 \rangle + \bar\mu \langle x \mid y_2 \rangle$ und $\langle x \mid x \rangle \geq 0$)
und erfüllt also die Polarisierungsidentität
$\langle x \mid y \rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \langle x + i^k y \mid x + i^k y \rangle$. Somit $\overline{\langle x \mid y \rangle} = \langle y \mid x \rangle$.
Dann $\varphi(x^*) \overset{(a)}{\longleftarrow} \varphi(x^* u_\lambda) = \langle x \mid u_\lambda \rangle = \overline{\langle u_\lambda \mid x \rangle} = \overline{\varphi(u_\lambda^* x)} \to \overline{\varphi(x)}$.
Nach Cauchy-Schwarz gilt $|\varphi(x)|^2 \longleftarrow |\varphi(u_\lambda x)|^2 \leq \varphi(u_\lambda^2)\,\varphi(x^*x) \leq \|\varphi\|\,\varphi(x^*x)$
$\lrcorner$

6.4 Prop.: Sei A eine C^*-Algebra, $\varphi: A \to \mathbb{C}$ stetig und linear.
Dann sind äquivalent:

(1) φ ist positiv

(2) $\forall (u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subseteq A$ approximierende Eins: $\|\varphi\| = \lim \varphi(u_\lambda)$

(3) $\exists (u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subseteq A$ approximierende Eins: $\|\varphi\| = \lim \varphi(u_\lambda)$

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2): o.E. $\|\varphi\|=1$ (sonst mit $\varphi' := \frac{\varphi}{\|\varphi\|}$)

$(\varphi(u_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ ist ein monoton wachsendes, beschränktes Netz in $\mathbb{C}$.
Also $\varphi(u_\lambda) \nearrow \alpha \leq 1$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$. Für $x\in A$, $\|x\|\leq 1$ gilt dann:

$$|\varphi(x)|^2 \longleftarrow |\varphi(u_\lambda x)|^2 \underset{C.S.}{\leq} \varphi(u_\lambda^2)\varphi(x^*x) \underset{\uparrow}{\leq} \varphi(u_\lambda)\varphi(x^*x) \leq \alpha$$

(da $0 \leq u_\lambda \leq 1$ ist nach Funktionalkalkül $u_\lambda^2 \leq u_\lambda$)

Da $\|\varphi\|=1$, ex. $\underset{\|x\|\leq 1}{x\in A}$ mit $|\varphi(x)|=1 \Rightarrow \alpha = 1$, $\|\varphi\| = \alpha$

(3) $\Rightarrow$ (1): o.E. $\|\varphi\|=1$. 1.) Für $x\in A_{sa}$, $\|x\|\leq 1$ ist $\varphi(x)\in\mathbb{R}$.

Sei $\varphi(x) = \alpha + \beta i$, o.E. $\beta \leq 0$. A: $\beta < 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}\|x - inu_\lambda\|^2 &= \|(x+inu_\lambda)(x-inu_\lambda)\| \\ &= \|x^2 + n^2u_\lambda^2 - in(xu_\lambda - u_\lambda x)\| \\ &\leq 1 + n^2 + n\|xu_\lambda - u_\lambda x\| \qquad \forall n\in\mathbb{N}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\beta|^2 + 2|\beta| n + n^2 = |-\mathrm{Im}(\varphi(x) - in)|^2 \leq$$
$$\leq |\varphi(x) - in|^2 \longleftarrow |\varphi(x - inu_\lambda)|^2 \leq 1 + n^2 + n\underbrace{\|xu_\lambda - u_\lambda x\|}_{\to 0}$$

Also $2|\beta|n + |\beta|^2 \leq 1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$ ↯

2.) Sei nun $x\geq 0$, $\|x\|\leq 1$. Dann ist $-1 \leq u_\lambda - x \underset{\uparrow}{\leq} 1$.
($u_\lambda \leq 1 \Rightarrow 1 - u_\lambda \geq 0 \Rightarrow 1 - u_\lambda + x \geq 0$)

Also $\|u_\lambda - x\| \leq 1$. Somit $1 - \varphi(x) \overset{1.)}{\leq} |1-\varphi(x)| \longleftarrow |\varphi(u_\lambda - x)| \leq 1$
$\Rightarrow \varphi(x) \geq 0$

6.5 Korollar: A unitale C^*-Algebra, $\varphi: A\to\mathbb{C}$ stetig, linear.
Dann $\varphi \geq 0 \Leftrightarrow \varphi(1) = \|\varphi\|$

6.6 Korollar: φ, φ' positive Funktionale auf A.
Dann $\|\varphi + \varphi'\| = \|\varphi\| + \|\varphi'\|$ (erstaunlich)

[Bew.: $\|\varphi\| + \|\varphi'\| \leftarrow \varphi(u_\lambda) + \varphi'(u_\lambda) = (\varphi + \varphi')(u_\lambda) \rightarrow \|\varphi + \varphi'\|$

6.7 Definition: Ein Zustand auf einer C^*-Algebra A ist ein positives Funktional φ mit $\|\varphi\| = 1$.

6.8 Bemerkung: Ist A unital, so ist φ ein Zustand genau dann, wenn φ positiv ist mit $\varphi(1) = 1$.

6.9 Erinnerung (Satz von Hahn-Banach): Sei E ein normierter $\mathbb{C}$-Vektorraum, $F \subseteq E$ ein linearer Teilraum, $f: F \to \mathbb{C}$ stetig, linear. Dann existiert eine stetige, lineare Fortsetzung $\tilde{f}: E \to \mathbb{C}$ von f mit $\|\tilde{f}\| = \|f\|$.

6.10 Satz: Sei A eine C^*-Algebra, $x \in A$ normal.
Dann existiert ein Zustand φ auf A mit $|\varphi(x)| = \|x\|$.

[Beweis: Nach dem Gelfandisomorphismus existiert ein Charakter $\varphi_0: C^*(x,1) \to \mathbb{C}$, $\varphi_0(1) = 1$ mit $|\varphi_0(x)| = |\chi(x)(\varphi_0)| = \|\chi(x)\|_\infty = \|x\|$
(insbes. stetig, linear), $\|\varphi_0\| \leq 1$)
Nach Hahn-Banach existiert dann eine stetige, lineare Fortsetzung $\tilde{\varphi}_0: \tilde{A} \to \mathbb{C}$ mit $\|\tilde{\varphi}_0\| = \|\varphi_0\| = 1 = \varphi_0(1) = \tilde{\varphi}_0(1) \overset{6.5}{\Longrightarrow} \tilde{\varphi}_0$ positiv.
Also $\varphi := \tilde{\varphi}_0|_A$ positiv mit $|\varphi(x)| = \|x\|$, d.h. $\|\varphi\| = 1$.

$$\begin{tikzcd} A \subseteq \tilde{A} \arrow[dr, bend left, "\tilde{\varphi}_0"] \arrow[d, phantom, "\cup"] & \\ C^*(x,1) \arrow[r, "\varphi_0"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

6.11 <u>Definition</u>: • Sei A eine C^*-Algebra. Eine <u>Darstellung</u> von A auf einem Hilbertraum H ist ein $*$-Homomorphismus $\pi : A \to \mathcal{L}(H)$.

- Zwei Darstellungen $(\pi_1, H_1), (\pi_2, H_2)$ heißen <u>äquivalent</u>, falls es eine unitäre Abbildung $U : H_1 \to H_2$ gibt, so dass $\pi_2(x) = U \pi_1(x) U^* \quad \forall x \in A$
- Sind $(\pi_i, H_i)_{i \in I}$ Darstellungen von A, so ist $(\bigoplus_{i\in I} \pi_i, \bigoplus_{i \in I} H_i)$ eine Darstellung auf $\bigoplus_{i\in I} H_i$, gegeben durch $(\bigoplus_{i \in I} \pi_i)(\xi_j) = \pi_j(\xi_j)$, $j \in I$, $\xi_j \in H_j$
- Eine Darstellung $\pi : A \to \mathcal{L}(H)$ heißt <u>nicht entartet</u>, falls $\overline{\pi(A)H} = H$
- Eine Darstellung $\pi : A \to \mathcal{L}(H)$ heißt <u>zyklisch</u>, falls es einen Vektor $\xi \in H$ gibt („<u>zyklischer Vektor</u>") mit $\overline{\pi(A)\xi} = H$ (insbesondere ist π also nicht entartet)

  ↑ wird überall hin transportiert

6.12 <u>Bemerkung</u>: Jede Darstellung ist als direkte Summe einer nicht entarteten und einer Nulldarstellung schreibbar.
Jede nichtentartete Darstellung ist als direkte Summe von zyklischen Darstellungen schreibbar.

6.13 <u>Lemma</u>: Seien $(\pi_1, H_1, \xi_1), (\pi_2, H_2, \xi_2)$ zwei zyklische Darstellungen von A und seien $f_i : A \to \mathbb{C}$ positive Funktionale, gegeben durch $f_i(x) = (\pi_i(x)\xi_i \mid \xi_i)$, $i = 1,2$.
Gilt $f_1 = f_2$, so gibt es ein Unitäres $U : H_1 \to H_2$ mit $\pi_2(x) = U\pi_1(x)U^*$ und $U\xi_1 = \xi_2$.

⌈**Beweis:** Setze $V: \pi_1(A)\xi_1 \longrightarrow \pi_2(A)\xi_2$, $\pi_1(x)\xi_1 \longmapsto \pi_2(x)\xi_2$. Dann ist V isometrisch. (also insbesondere wohldef.)

$\|V\pi_1(x)\xi_1\|^2 = (\pi_2(x^*x)\xi_2|\xi_2) = f_2(x^*x) = f_1(x^*x) = \|\pi_1(x)\xi_1\|^2$

wohldefiniert: $\pi_1(x)\xi_1 = \pi_1(y)\xi_1 \Rightarrow \pi_1(x-y)\xi_1 = 0 \Rightarrow \pi_2(x-y)\xi_2 = 0$

V setzt sich zu einem Unitären $U: \overline{\pi_1(A)\xi_1} \longrightarrow \overline{\pi_2(A)\xi_2}$ fort.

Es gilt $(U\pi_1(x)U^*)(\pi_2(y)\xi_2) = U\pi_1(xy)\xi_1 = \pi_2(xy)\xi_2 = \pi_2(x)(\pi_2(y)\xi_2)$,

also $U\pi_1(x)U^* = \pi_2(x)$ auf einer dichten Teilmenge.

Außerdem $U\xi_1 \longleftarrow U\pi_1(u_\lambda)\xi_1 = \pi_2(u_\lambda)\xi_2 \longrightarrow \xi_2$

(denn $\overline{\pi_i(A)H} = H$, also ex. $y \in A$, $\eta \in H$ mit $\|\pi_i(y)\eta - \xi_1\| < \varepsilon$.

Dann $\|\pi_i(u_\lambda)\xi_1 - \xi_1\| < 3\varepsilon$ für $\lambda \geq \lambda_0$, da $\|\pi_i(u_\lambda)\pi_i(y)\eta - \pi_i(y)\eta\| < \varepsilon$) ⌋

6.14 Satz (GNS-Konstruktion): Sei f ein Zustand auf einer C^*-Algebra A. Dann existiert eine (bis auf Äquivalenz eindeutige) zyklische Darstellung (π_f, H_f, ξ_f) von A, so dass $f(x) = (\pi_f(x)\xi_f|\xi_f)$.

⌈**Beweis:** Idee: Ist $A = \mathcal{C}(X)$, so ergibt ein positives Funktional φ ein Maß μ mit $\varphi(f) = \int_X f(x)\,d\mu(x)$ (s. 6.2).
Per $\varphi(\bar{f}g) = \int_X \bar{f}(x)g(x)\,d\mu(x)$ ergibt dies einen Hilbertraum.

1.) Konstruktion des Hilbertraums:

- $(x|y)_f := f(y^*x)$ ist positive Sesquilinearform (vgl. 6.3(b)-Beweis)
- $N_f := \{x \in A \mid (x|x)_f = 0\}$, $K_f := A/N_f$ ist Prä-Hilbertraum mit $(\cdot|\cdot)_f$, denn für die Quotientenabbildung $\gamma: A \to A/N_f$ ist $(\gamma(x)|\gamma(y)) := (x|y)_f$ wohldefiniert.
  Und γ ist stetig: $\|\gamma(x)\|^2 = (\gamma(x)|\gamma(x)) = f(x^*x) \leq \|x\|^2$
- Setze $H_f := \overline{K_f}^{\|\cdot\|_f}$ Hilbertraum.

2.) Konstruktion von $\pi_f : A \to \mathcal{L}(H_f)$:

- Definiere $\pi_f^\circ(x)\gamma(y) := \gamma(xy)$. Dann ist $\pi_f^\circ(x): K_f \to K_f$ stetig:

$$\|\gamma(xy)\|^2 = f(y^*x^*xy) \underset{\uparrow}{\leq} \|x^*x\|\, f(y^*y) = \|x\|^2 \|\gamma(y)\|^2$$

(denn $x^*x \leq \|x^*x\| 1$, da positiv, Funktionalkalkül)

Also $\|\pi_f^\circ(x)\| \leq \|x\|$, insbesondere $\pi_f^\circ(x)$ wohldefiniert.

($\gamma(y) = \gamma(z)$, dann $\|\gamma(xy) - \gamma(xz)\|^2 \leq \|x\|^2 \|\gamma(y-z)\|^2 = 0$)

- Setze $\pi_f^\circ(x)$ fort zu $\pi_f(x): H_f \to H_f$, also $\|\pi_f(x)\| \leq \|x\|$

- Es gilt $\pi_f^\circ(x)\pi_f^\circ(y) = \pi_f^\circ(xy) \implies \pi_f(x)\pi_f(y) = \pi_f(xy)$

und $\pi_f^\circ(x^*) \underset{\uparrow}{=} \pi_f^\circ(x)^* \implies \pi_f(x^*) = \pi_f(x)^*$

$$\Big((\pi_f^\circ(x)\gamma(y) \mid \gamma(z)) = f(z^*xy) = f((x^*z)^*y) = (\gamma(y) \mid \pi_f^\circ(x^*)\gamma(z)) \Big)$$

Somit ist $\pi_f : A \to \mathcal{L}(H_f)$ eine Darstellung von A auf H_f.

3.) Konstruktion von ξ_f:

- Sei $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ approximierende Eins für A. $\xi_f := \lim \gamma(u_\lambda)$.

Der Limes existiert, da $(\gamma(u_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ ein Cauchynetz ist:

Sei $\lambda \geq \mu$. $\|\gamma(u_\lambda) - \gamma(u_\mu)\|^2 = f((u_\lambda - u_\mu)^2) \underset{\uparrow}{\leq} f(u_\lambda - u_\mu) \to \|f\| - f(u_\mu) < \varepsilon$

($u_\lambda \geq u_\mu \implies 1 \geq u_\lambda \geq u_\lambda - u_\mu \geq 0$, also $(u_\lambda - u_\mu)^2 \leq u_\lambda - u_\mu$)

- ξ_f ist zyklisch, denn für $x \in A$ ist $\pi_f(x)\gamma(u_\lambda) = \gamma(xu_\lambda) \to \gamma(x)$,

d.h. $\pi_f(x)\xi_f = \gamma(x) \quad \forall \gamma(x) \in K_f$.

4.) $(\pi_f(x)\xi_f \mid \xi_f) = \lim (\pi_f(x)\gamma(u_\lambda) \mid \gamma(u_\mu)) = \lim f(u_\mu x u_\lambda) = f(x)$

$\llcorner$

6.15 Korollar („2. Fundamentalsatz"): Jede C^*-Algebra A besitzt eine treue (d.h. injektive) Darstellung $\pi : A \to \mathcal{L}(H)$.

A ist also isomorph zu einer C^*-Unteralgebra von $\mathcal{L}(H)$.

Bew: Sei $x \in A$, $x \neq 0$. Nach 6.10 ex. ein Zustand f auf A mit

$f(x^*x) = \|x\|^2 \overset{6.14}{\implies} \|\pi_f(x)\xi_f\|^2 = f(x^*x) = \|x\|^2$, insbes. $\pi_f(x) \neq 0$.

Setze $\pi := \bigoplus_{f \text{ Zustand}} \pi_f$. Dann $\pi(x) \neq 0$ für $x \neq 0$.

$\llcorner$

„Jede (abstrakte) C^*-Algebra hat eine konkrete Darstellung"

6.16 Bemerkung: Ist A eine separable C^*-Algebra, so kann A auch auf einem separablen Hilbertraum treu dargestellt werden.

⌈Bew: $\{x_1, x_2, \dots\} \subseteq A$ abzählbar dicht, f_n Zustände mit $f_n(x_n^* x_n) = \|x_n\|^2$. Dann alle H_{f_n} separabel und

⌊ $\pi := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \pi_{f_n}$ treue Darstellung.

Die Aussage der GNS-Konstruktion kann noch verfeinert werden, mit Hilfe von reinen Zuständen. Wir skizzieren das abschließ.

6.17 Definition: Sei A eine C^*-Algebra, H ein Hilbertraum, $K \subseteq H$ ein abgeschlossener Unterraum, $\pi : A \to \mathcal{L}(H)$ eine Darstellung.
K ist unter π invariant, falls $\pi(A) K \subseteq K$.

6.18 Bemerkung: Dann ist auch $K^\perp$ invariant unter π, denn für $\xi \in K$, $\eta \in K^\perp$ ist $(\xi | \pi(x)\eta) = (\underbrace{\pi(x^*)\xi}_{\in K} | \eta) = 0$.

Also ist $(\pi, H) = (\pi_1 \oplus \pi_2, K \oplus K^\perp)$ für $\pi_1(x) := \pi(x)_{|K} \in \mathcal{L}(K)$,
$\pi_2(x) := \pi(x)_{|K^\perp} \in \mathcal{L}(K^\perp)$.

K „reduziert" π.

6.19 Definition/Proposition: Sei A eine C^*-Algebra, $\pi : A \to \mathcal{L}(H)$ eine Darstellung. π heißt irreduzibel, falls eine der Bedingungen erfüllt ist:

Trivialfälle:
- (i) $\pi = 0$
- (ii) $\dim H = 1$

eigentliche Definition (äquivalente Bedingungen):
- (iii) Die einzigen abgeschlossenen Unterräume von H, die unter $\pi(A)$ invariant sind, sind 0 und H.
- (iv) $\pi(A)' = \mathbb{C}1$, wobei $\pi(A)' := \{x \in \mathcal{L}(H) \mid x\pi(y) = \pi(y)x \ \forall y \in A\}$ „Kommutante"
- (v) Jeder Vektor $\xi \neq 0$ in H ist zyklisch.

Die Aussagen (iii)–(v) sind äquivalent (und (ii) $\Rightarrow$ (iii)) falls $\pi \neq 0$.

Bew: (iii) $\Rightarrow$ (iv): Sei $h \in \pi(A)'$. Annahme: $h \notin \mathbb{C}1$. O.E. $h = h^*$
(gilt $h = h^* \Rightarrow h \in \mathbb{C}1$, so ist $h = \mathrm{Re}\, h + i\, \mathrm{Im}\, h \in \mathbb{C}1$ $\forall h$.)

Sp h enthält also mindestens zwei verschiedene Punkte $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$.
Wähle $f_1, f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ stetig mit $f_1 f_2 = 0$, f_1 a_1 a_2 f_2,
so dass $f_1(h) \neq 0$, $f_2(h) \neq 0$. $\pi(A)' \subseteq \mathcal{L}(H)$ ist eine unitale C^*-Algebra, also $f_1(h), f_2(h) \in \pi(A)'$.

Setze $K_1 := \overline{f_1(h)H}$, $K_2 := \overline{f_2(h)H}$. Dann sind K_i abgeschlossene Teilräume, die unter $\pi(A)$ invariant sind.

$(\pi(A) f_i(h) H = f_i(h)\pi(A) H \subseteq f_i(h) H)$

Und $K_1 \perp K_2$, da $(f_1(h)\xi \mid f_2(h)\eta) = ((f_1 f_2)(h)\xi \mid \eta) = 0$. ↯ $\left(\begin{smallmatrix} K_1 \neq 0 \\ K_1 \neq H \end{smallmatrix}\right)$

(iv) $\Rightarrow$ (iii): K invarianter Teilraum. Sei $P_K \in \mathcal{L}(H)$ die orthogonale Projektion auf K. Dann ist $P_K \in \pi(A)'$.

($\forall x \in A$ $\forall \xi \in H$: $\pi(x)\underbrace{P_K\xi}_{\in K} \in K$, also $\pi(x)P_K = P_K\pi(x)P_K$ $\forall x \in A$

$\Rightarrow$ $P_K\pi(x) = (\pi(x)^* P_K)^* = (P_K \pi(x^*) P_K)^* = P_K\pi(x)P_K$ $\forall x \in A$

$\Rightarrow$ $P_K\pi(x) = \pi(x)P_K$ $\forall x \in A$)

Somit ist $P_K \in \pi(A)' = \mathbb{C}1$, d.h. $P_K \in \{0,1\} \Rightarrow K \in \{0, H\}$.

(iii) $\Rightarrow$ (v): Sei $\xi \in H$, $\xi \neq 0$. Dann ist $K := \overline{\pi(A)\xi}$ invarianter Teilraum.
Also $K = 0$ oder $K = H$.
Annahme: $K = 0$. Dann ist $\mathbb{C}\xi$ invariant $(\pi(A)\mathbb{C}\xi = 0 \subseteq \mathbb{C}\xi)$,
also $\mathbb{C}\xi = H$ und $\pi_{|\mathbb{C}\xi} = 0$ $\Rightarrow \pi = 0$ ↯

(v) $\Rightarrow$ (iii): Sei K invarianter Teilraum, $K \neq 0$. Dann ex. $\xi \in K$ mit $\xi \neq 0$. Also $H = \overline{\pi(A)\xi} \subseteq K \subseteq H$.

└

6.20 Bemerkung: Irreduzible Darstellungen sind Bausteine von Darstellungen. Ist [illegible] der Hilbertraum endlich, so ist jede Darstellung die direkte Summe von endlich vielen irreduziblen Darstellungen.

6.21 <u>Definition</u>: Ein Zustand f auf einer C^*-Algebra A heißt <u>rein</u>, falls $0 \leq g \leq f \Rightarrow \exists \lambda \in [0,1] : g = \lambda f$

6.23 <u>Bemerkung</u>: Sei f ein Zustand auf einer C^*-Algebra. Dann gilt f ist rein $\Leftrightarrow$ (π_f, H_f, ξ_f) irreduzibel
(Verschärfung von 6.14)

6.22 <u>Bemerkung</u>: Ist $A = \mathcal{C}(X)$, X kompakt, so korrespondieren die reinen Zustände genau zu den Diracmaßen auf X
(vgl. 6.2)

6.24 <u>Bemerkung</u>: Ist A eine C^*-Algebra, so ist die Menge $B = \{f \in A' \mid f \geq 0, \|f\| \leq 1\}$ konvex und kompakt (in der Topologie der punktweisen Konvergenz) und ihre Extremalpunkte sind 0 und die reinen Zustände.
($a \in M$ extremal $:\Leftrightarrow$ falls $a = ta_1 + (1-t)a_2$ für ein $t \in (0,1)$, so ist $a_1 = a_2 = a$)

Nach Krein-Milman ist B also der Abschluss der konvexen Hülle der reinen Zustände und 0.
(also $f \in B \Rightarrow f \leftarrow \sum_{i=1}^n t_i f_i$, f_i reine Zustände oder 0, $\sum_{t_i \geq 0} t_i = 1$)

6.25 <u>Satz</u>: Sei A eine C^*-Algebra, $0 \neq x \in A$.
Dann existiert eine irreduzible Darstellung π mit $\|\pi(x)\| = \|x\|$

<u>Bew</u>: Setze $K := \{f \mid f \text{ Zustand}, f(x^*x) = \|x\|^2\} \subseteq B$.
Dann ist $K \subseteq B$ extremal $(tf_1 + (1-t)f_2 \in K, f_1, f_2 \in B \Rightarrow f_1, f_2 \in K)$ und nichtleer (6.10). Nach Krein-Milman existiert dann ein reiner Zustand $f \in K$. Also ist π_f irreduzibel und
$(\pi_f(x^*x)\xi_f \mid \xi_f) = f(x^*x) = \|x\|^2 \Rightarrow \|x\|^2 = \|\pi_f(x)\xi_f\|^2 \leq \|\pi_f(x)\|^2 \leq \|x\|^2$

$\llcorner$