Einführung in die Theorie der Operatoralgebren (C^*-Algebren)

1. C^*-Algebren

1.1. Def.: 1) Eine Banachalgebra A ist

- Algebra

  (Addition: $A \times A \to A$, $(a,b) \mapsto a+b$

  skalare Multipl: $\mathbb{C} \times A \to \mathbb{C}$, $(\lambda, a) \mapsto \lambda a$

  Multiplikation: $A \times A \to A$, $(a,b) \mapsto ab$

  verträglich: distributiv und assoziativ

  $\to \lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b) \quad \forall a,b \in A,\ \lambda \in \mathbb{C}$

- normiert mit submultiplikativer Norm $\|\cdot\|$, d.h.

  $\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\| \qquad \forall a,b \in A$

- vollständig bzgl. $\|\cdot\|$

Besitzt A eine Eins 1 (d.h. $a1 = 1a = a \quad \forall a \in A$) mit $\|1\| = 1$, so heißt A Banachalgebra mit Eins oder unitale Banachalgebra

2) Eine <u>Banach $*$-Algebra</u> ist eine Banachalgebra mit Involution $*: A \to A$, d.h.

$$(a+b)^* = a^* + b^*$$

$$(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$$

$$(ab)^* = b^* a^*$$

$$(a^*)^* = a$$

so daß gilt: $\|a^*\| = \|a\| \quad \forall a \in A$

3) Eine <u>C^*-Algebra</u> ist eine Banach $*$-Algebra, für die gilt: $\|a^*a\| = \|a\|^2 \quad \forall a \in A$

4) Seien A_1, A_2 zwei Banachalgebren und $\varphi: A_1 \to A_2$ eine lineare Abb. Ist φ multiplikativ, d.h.

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \quad \forall a, b \in A_1,$$

so heißt φ (Algebren-) <u>Homomorphismus</u>

<u>Isomorphismus</u> $:\Leftrightarrow$ φ bijektiv

<u>isometrischer Isomorphismus</u> $:\Leftrightarrow$ φ Isomorphismus und $\|\varphi(a)\| = \|a\| \quad \forall a \in A_1$

<u>$*$-Homomorphismus</u> $:\Leftrightarrow$ $\varphi(a^*) = \varphi(a)^* \quad \forall a \in A_1$

(A_1, A_2 Banach $*$-Algebren)

<u>unital</u> (A_1, A_2 mit Eins) $:\Leftrightarrow$ $\varphi(1) = 1$

5) Zwei C^*-Algebren A_1 und A_2 heißen <u>isomorph</u> ($A_1 \cong A_2$), falls es einen $*$-Isomorphismus $\varphi: A_1 \to A_2$ gibt.

1.2. Bem.: Beachte: Wir haben die Existenz einer Eins für C^*-Algebren nicht gefordert. Es gibt wichtige Beispiele von C^*-Algebren ohne Eins.

1.3. Beispiele: 1) $\mathbb{C}$ ist (die einfachste) unitale C^*-Algebra, $\lambda^* = \overline{\lambda}$

2) Sei K ein kompakter top. Raum (z.B. $K = [0,1]$)

$C(K) := \{ f : K \to \mathbb{C} \mid f \text{ stetig} \}$ mit

- punktweisen algebraischen Operationen
- $\|f\| := \sup_{t \in K} |f(t)|$
- $f^*(t) = \overline{f(t)}$

ist kommutative C^*-Algebra mit Eins ($1 \hat{=} f$ mit $f(t) = 1 \; \forall t \in K$)

3) Sei Ω ein lokalkompakter top. Raum (z.B. $\Omega = \mathbb{R}$)

$C_0(\Omega) := \{ f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f \text{ stetig}, f \text{ verschwindet in } \infty \}$

mit gleichen Strukturen wie oben

$C_0(\Omega)$ ist kommutative C^*-Algebra ohne Eins (falls Ω nicht kompakt)

(konstante Fkt $\notin C_0(\Omega)$)

(Ω lokalkompakt $\Leftrightarrow$ jeder Pkt $\omega \in \Omega$ hat kompakte Umgebung

f verschwindet in $\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ ist $\{\omega \in \Omega \mid |f(\omega)| \geq \varepsilon\}$ kompakt

4) Sei $\mathcal{H}$ Hilbertraum, dann ist $B(\mathcal{H})$ C^*-Algebra mit Eins.

allgemeiner: Sei $A \subset B(\mathcal{H})$ abgeschlossene Unter-$*$-algebra von $B(\mathcal{H})$. Dann ist A C^*-Algebra

insbesondere: $\mathcal{K}(\mathcal{H}) \subset B(\mathcal{H})$ (kompakte Operatoren)

$\mathcal{K}(\mathcal{H})$ ist C^*-Algebra ohne Eins, falls $\dim \mathcal{H} = \infty$

5) Sei $M_n = B(\mathbb{C}^n)$ $n \times n$-Matrizen

und $A = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & a \end{array} \right) \in M_{2n} \;\middle|\; a \in M_n \right\} \subset M_{2n}$

Dann ist A C^*-Algebra und $A \cong M_n$ vermöge

$a \longmapsto \left(\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & a \end{array} \right)$

$M_2 \to A$

1.4. Lemma: Sei A eine Banachalgebra versehen mit einer Involution, so daß gilt:

$\|a\|^2 \leq \|a^* a\| \quad \forall a \in A$

Dann ist A eine C^*-Algebra.

Beweis: $\|a\|^2 \leq \|a^*a\| \leq \|a^*\| \, \|a\| \overset{a \neq 0}{\Longrightarrow} \|a\| \leq \|a^*\|$

$\overset{a \to a^*}{\Longrightarrow} \|a^*\| \leq \|a\|$ $\Big\} \Rightarrow \|a\| = \|a^*\|$

$\Rightarrow$ "$=$" "$=$"

$\Rightarrow \|a\|^2 = \|a^*a\|$

$\square$

1.5 Lemma: Sei A eine C^*-Algebra. Dann gilt

$$\|c\| = \sup_{\|b\|\le 1} \|cb\| = \sup_{\|a\|\le 1} \|ac\| \quad \forall\, c \in A$$

Beweis: "$\ge$": $\|cb\| \le \|c\|\,\|b\| \le \|c\|$

"$\le$": Setze $b := \dfrac{c^*}{\|c\|} \overset{c\neq 0}{\Longrightarrow} \|b\| = 1$ und

$$\|cb\| = \frac{\|cc^*\|}{\|c\|} = \frac{\|c\|^2}{\|c\|} = \|c\|$$

andere Gleichung analog $\square$

Problem: Bette Algebra ohne Eins in Algebra mit Eins ein

$$A \longrightarrow \tilde{A}$$

Für Banachalgebren:

$\tilde{A} = A \oplus \mathbb{C}$ als Vektorräume

$(a,\lambda) \in \tilde{A} \quad \leftrightsquigarrow \quad a + \lambda \cdot 1$

$(a,\lambda)(b,\mu) := (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)$

$(a,\lambda)^* := (a^*, \bar{\lambda})$

Norm: $\|(a,\lambda)\| := \|a\| + |\lambda|$ ist Banach-Algebra-Norm

aber keine C^*-Norm i.a.

<u>1.6 Def.</u>: Sei A eine C^*-Algebra. Ein Paar (L,R) von beschränkten linearen Abbildungen

$L: A \to A \quad , \quad R: A \to A$

mit den Eigenschaften

$L(ab) = L(a)b$

$R(ab) = aR(b)$

$R(a)b = aL(b)$

heißt <u>Doppel-Zentralisator</u> (double centraliser) für A.

1.7. Beispiel: Sei $c \in A$ und

$$L_c(a) = ca, \quad R_c(a) = ac$$

$\Rightarrow (L_c, R_c)$ Doppel-Zentralisator

Außerdem

$$\|c\| \overset{1.5}{=} \sup_{\|b\| \le 1} \|cb\|$$

~~(da $\|cb\| \le \|c\|\,\|b\| \le \|c\|$ und $b = \frac{c^*}{\|c^*\|}$: $\|cb\| = \frac{1}{\|c^*\|}\|cc^*\| = \|c\|$)~~

$$= \sup_{\|b\| \le 1} \|L_c(b)\|$$

$$= \|L_c\|$$

analog: $\|c\| = \sup_{\|b\| \le 1} \|bc\| = \|R_c\|$

1.8. Lemma: Sei (L, R) ein Doppel-Zentralisator für die C^*-Algebra A. Dann gilt:

$$\|L\| = \|R\|$$

Beweis: $\|aL(b)\| = \|R(a)b\| \le \|R\|\,\|a\|\,\|b\|$

$$\Rightarrow \|L(b)\| = \sup_{\|a\| \le 1} \|aL(b)\| \le \|R\|\,\|b\|$$

$$\Rightarrow \|L\| \le \|R\|$$

analog: $\|R(a)b\| = \|aL(b)\| \le \|a\|\,\|L\|\,\|b\|$

$$\Rightarrow \|R(a)\| = \sup_{\|b\| \le 1} \|R(a)b\| \le \|L\|\,\|b\|$$

$$\Rightarrow \|R\| \le \|L\| \qquad \Rightarrow \|L\| = \|R\|$$

(multiplier algebra)

1.9. Def.: Die **Multiplikatoralgebra** $M(A)$ einer C^*-Algebra A ist die Menge

$$M(A) := \{ (L,R) \mid (L,R) \text{ Doppel-Zentralisator für } A \}$$

versehen mit den Operationen

- $(L_1, R_1) + (L_2, R_2) := (L_1 + L_2, R_1 + R_2)$
- $\lambda (L_1, R_1) := (\lambda L_1, \lambda R_1)$
- $(L_1, R_1)(L_2, R_2) := (L_1 L_2, R_2 R_1)$
- $\|(L,R)\| := \|L\| = \|R\|$
- $(L,R)^* := (R^*, L^*)$ wobei $L^*(a) := (L(a^*))^*$

  $R^*(a) := (R(a^*))^*$

1.10 Satz: Die Multiplikatoralgebra $M(A)$ ist eine C^*-Algebra mit Eins, welche A vermöge des isometrischen $*$-Homomorphismus

$$A \to M(A)$$
$$a \mapsto (L_a, R_a)$$

enthält.

Beweis: - $M(A)$ wird Algebra nachrechnen!

- $M(A)$ vollständig: betrachte $M(A)$ als linearen Teilraum

$$M(A) \subset B(A) \oplus B(A)$$

$M(A)$ abgeschlossen in $B(A) \oplus B(A)$

$\big((L_n, R_n) \xrightarrow{n \to \infty} (L,R)$ und $(L_n, R_n) \in M(A)$

$\Rightarrow (L,R) \in M(A) \big)$

- $*$ Involution nachrechnen!

(z.B. $L^{**}(a) = (L^*)^*(a) = \underbrace{(L^*(a^*))^*}_{(L(a))^*} = L(a)$

$(L,R)^{**} = (R^*,L^*)^* = (L^{**},R^{**}) = (L,R)$)

- Sei $T = (L,R) \in \mathcal{M}(A)$

z.z.: $\|T^*T\| = \|T\|^2$

$\|T\|^2 = \|L\|^2 = \sup\limits_{\|a\|\leq 1} \|L(a)\|^2$

$\|L(a)\|^2 = \|(L(a))^* L(a)\|$ beachte: (R^*, L^*) Zentralisator

$= \| L^*(a^*) L(a)\|$ $\quad \underset{R(a^*)b}{L^*(a^*)}\ \underset{=}{\vphantom{L}}\ \underset{}{L(a)}\quad a\,\underset{L(b)}{R^*}$

$= \| a^* R^*(L(a))\|$

$\leq \|a^*\| \underbrace{\|R^*(L(a))\|}_{\leq \|R^*L\|\,\|a\|}$

$\overset{\|a\|\leq 1}{\leq} \|R^*L\|$

$= \|T^*T\|$

$\Rightarrow \|T\|^2 \leq \|T^*T\|$

$\overset{1.4.}{\Rightarrow} \|T\|^2 = \|T^*T\|$

- $a \mapsto (L_a, R_a)$ isometr. Einbettung

vgl. 1.7.

nachrechnen!

beachte: $a \mapsto (L_a, R_a)$

$a^* \mapsto (L_{a^*}, R_{a^*})$ $*$

$$(L_a, R_a)^* = (R_a^*, L_a^*)$$

und $R_a^*(b) = (R_a(b^*))^* = (b^* a)^* = a^* b = L_{a^*}(b)$

$\Rightarrow R_a^* = L_{a^*}$

also $(L_a, R_a)^* = (R_a^*, L_a^*) = (L_{a^*}, R_{a^*})$

- $M(A)$ besitzt Eins $\mathbb{1}$

$\mathbb{1} = (id, id) \in M(A)$

$\square$

<u>1.11. Notation:</u> Sei A C^*-Algebra. Setze

$\tilde{A} := A \oplus \mathbb{C}$ (als Vektorraum)

versehen mit Multiplikation

$(a, \lambda)(b, \mu) := (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)$

und Involution

$(a, \lambda)^* := (a^*, \bar{\lambda})$

$\tilde{A}$ heißt <u>Unitalisierung</u> (unitisation) von A.
$(0,1)$ ist Eins von $\tilde{A}$

<u>1.12. Satz:</u> Es gibt eine kanonische Norm auf $\tilde{A}$, so daß $\tilde{A}$ zur C^*-Algebra wird.

Beweis: i) A besitze eine Eins e

$$\|(a,\lambda)\| := \max(\|a+\lambda e\|, |\lambda|)$$

$$\Rightarrow \|\underbrace{\underbrace{(a,\lambda)^*}_{(a^*,\bar\lambda)}(a,\lambda)}_{(a^*a+\bar\lambda a+\lambda a^*,\ |\lambda|^2)}\| = \max(\underbrace{\|a^*a+\bar\lambda a+\lambda a^*+\bar\lambda\lambda e\|}_{\substack{=\|(a+\lambda e)^*(a+\lambda e)\| \\ = \|a+\lambda e\|^2}}, |\lambda|^2)$$

$$= (\max(\|a+\lambda e\|, |\lambda|))^2$$

$$= \|(a,\lambda)\|^2$$

ii) A besitze keine Eins

Betrachte $A \subset M(A)$

1 sei die Eins von $M(A)$

A keine Eins $\Rightarrow A \cap \mathbb{C}\cdot 1 = \{0\}$

$$\Rightarrow \tilde{A} = A \oplus \mathbb{C} \mathrel{\hat=} A \oplus \mathbb{C}\cdot 1 = \{a+\lambda\cdot 1 \mid a\in A, \lambda\in\mathbb{C}\} \subset M(A)$$

$$(a,\lambda) \mapsto a+\lambda\cdot 1$$

Setze $\|(a,\lambda)\| := \|a+\lambda 1\|$

$\square$

1.13. Beispiele: 1) Ω lokalkompakter Raum

$A = C_0(\Omega)$ C^*-Algebra ohne Eins

$M(A) = C_b(\Omega) = \{$beschränkten stetigen Fkten auf $\Omega\}$

$$\tilde{A} = C_0(\Omega) \oplus \mathbb{C}\cdot 1 \subsetneqq C_b(\Omega) = M(A)$$

2) Sei $\mathcal{H}$ Hilbertraum, $\dim \mathcal{H} = \infty$

$A = \mathcal{K}(\mathcal{H}) \subset B(\mathcal{H})$ C^*-Algebra ohne Eins

$\Rightarrow M(A) = B(\mathcal{H})$

$\tilde{A} = \mathcal{K}(\mathcal{H}) \oplus \mathbb{C} \cdot 1$

1.14 Satz: Sei A eine unitale C^*-Algebra und $a \in A$ normal (d.h. $aa^* = a^*a$). Dann gilt

$$r(a) = \|a\|$$

(wobei $r(a)$ der Spektralradius ist:

$r(a) := \sup\{ |\lambda| \mid \lambda \in \sigma(a) \}$)

Beweis: Es gilt allgemein in Banachalgebren

$$r(a) = \lim_{n \to \infty} \|a^n\|^{1/n}$$

Sei nun $aa^* = a^*a$

$$\Rightarrow \|a^2\|^2 = \|(a^2)^* a^2\| = \|a^* \underbrace{a^* a}_{aa^*} a\| = \|(a^*a)^*(a^*a)\|$$
$$= \|a^*a\|^2$$
$$= \|a\|^4$$

$$\Rightarrow \|a^2\| = \|a\|^2$$

$$\overset{\text{Induktion}}{\Rightarrow} \|a^{2^n}\| = \|a\|^{2^n}$$

$$\Rightarrow r(a) = \lim_{n \to \infty} \|a^n\|^{1/n} = \lim_{n \to \infty} \|a^{2^n}\|^{1/2^n} = \|a\|$$

1.15. Folgerung: Eine $*$-Algebra besitzt höchstens eine Norm, die sie zur C^*-Algebra macht.

Beweis: o.E. sei A unital, sonst betrachte $\tilde{A}$ (oder $M(A)$)

Sei $a \in A$ und $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ zwei C^*-Normen auf A

$$\Rightarrow \|a\|_1^2 = \|a^*a\|_1 = r(a^*a) = \|a^*a\|_2 = \|a\|_2^2$$

a^*a selbstadj. (insb. normal)

$$\Rightarrow \|a\|_1 = \|a\|_2 \quad \forall a \in A$$

$\square$

1.16 Folgerung: 1) Sei A eine Banach $*$-Algebra, B eine C^*-Algebra und

$\varphi : A \to B$

ein $*$-Homomorphismus. Dann gilt

$$\|\varphi(a)\| \leq \|a\| \quad \forall a \in A$$

2) ⊛

Beweis: o.E. A, B unital und $\varphi(1) = 1$

(sonst betrachte $\tilde{A}, \tilde{B}$ und $\tilde{\varphi} : \tilde{A} \to \tilde{B}$
$(a, \lambda) \mapsto (\varphi(a), \lambda)$)

Es gilt: $\sigma(\varphi(a)) \subseteq \sigma(a)$

denn: $\lambda \notin \sigma(a) \Leftrightarrow \lambda - a$ invertierbar

$\Rightarrow \varphi(\lambda - a) = \lambda - \varphi(a)$ invertierbar $\Rightarrow \lambda \notin \sigma(\varphi(a))$

⊛ 2) Sind zwei C^*-Algebren A und B isomorph, so erhält der $*$-Isomorphismus auch die Norm

<u>Beweis</u>:

$$\left.\begin{array}{l} \| \varphi(a) \| \leq \|a\| \\ \| \varphi^{-1}(a) \| \leq \|a\| \Rightarrow \|a\| \leq \|\varphi(a)\| \end{array}\right\} \Rightarrow \|\varphi(a)\| = \|a\| \quad \forall a \in A$$

also: $r(\rho(a)) \leq r(a)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \|\rho(a)\|^2 &= \|\rho(a)^* \rho(a)\| \\ &= \|\rho(a^* a)\| \\ &= r(\rho(a^* a)) \\ &\leq r(a^* a) \\ &\leq \|a^* a\| \\ &\leq \|a\|^2 \end{aligned}$$

$\square$

<u>117. Erinnerung</u>: Gelfand-Darstellung für kommutative C^*-Algebren mit 1.

Sei A eine kommutative C^*-Algebra mit 1

$\tau : A \to \mathbb{C}$ $*$-Homomorphismus mit $\tau \neq 0$

heißt <u>komplexer Homomorphismus</u> oder <u>Charakter</u>

$\Omega(A) := \Sigma(A) := \{\tau : A \to \mathbb{C} \mid \tau \text{ Charakter}\}$ heißt

<u>Spektrum von A</u>.

Für $a \in A$ definiere die Funktion $\hat{a} : \Omega(A) \to \mathbb{C}$ durch

$\hat{a}(\tau) = \tau(a)$

Es gibt dann genau eine Topologie auf $\Omega(A)$, so daß

- $\Omega(A)$ kompakt
- alle $\hat{a}$ sind stetig.

Die Abbildung

$$\hat{}: A \to C(\Omega(A))$$
$$a \mapsto \hat{a}$$

ist ein isometrischer $*$-Isomorphismus und heißt die <u>Gelfand-Darstellung</u> von A

also: A komm. C^*-Algebra mit 1

$\Rightarrow A \cong C(\Omega)$ für kompaktes Ω.

Sei nun A kommutative C^*-Algebra ohne Eins.

Betrachte $A \subset \tilde{A}$

1.17 $\Rightarrow \Omega(\tilde{A})$ kompakter Raum und

$$\tilde{A} \cong C(\Omega(\tilde{A}))$$

Frage: Wie sitzt A in $C(\Omega(\tilde{A}))$?

Sei $\tau_0 \in \Omega(\tilde{A})$ mit $\tau_0(a,\lambda) = \lambda$

$\Rightarrow \underset{\hat{a}(\tau_0)}{\underset{\shortparallel}{\tau_0(a)}} = 0 \quad \forall a \in A$ (Identifiziere $\underset{A}{a} \leftrightarrow \underset{\tilde{A}}{(a,0)}$)

d.h.: $a \in A \Rightarrow \hat{a}$ hat Eigenschaft $\hat{a}(\tau_0) = 0$

Umgekehrt: Sei $\hat{x} \in C(\Omega(\tilde{A}))$ mit $\underbrace{\hat{x}(\tau_0)}_{\tau_0(x) = \lambda} = 0$

falls $x = (a,\lambda)$

$\Rightarrow x = (a,0)$ für $a \in A$

1.18. Folgerung: Sei A kommutative C^*-Algebra ohne Eins und $\tau_0 \in \Omega(\tilde{A})$ der spezielle Charakter $\tau_0(a,\lambda) = \lambda$.

Dann ist

$$A \cong \{ f : \Omega(\tilde{A}) \to \mathbb{C} \mid f \text{ stetig},\ f(\tau_0) = 0 \}$$
$$\cong C_0(\Omega(A))$$

wobei $\Omega(A) := \Omega(\tilde{A}) \setminus \{\tau_0\}$ lokalkompakt

Beweis: $\Omega(\tilde{A})$ kompakt $\Leftrightarrow$ $\Omega(\tilde{A}) \setminus \{\tau_0\}$ lokalkompakt

$$\left.\begin{array}{l} f \in C(\Omega(\tilde{A})) \\ f(\tau_0) = 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} f \in C_0(\Omega(A)) \\ f \text{ verschwindet im } \infty \ (\hat{=}\ \tau_0) \end{array}$$

$\square$

also: A komm. C^*-Algebra ohne Eins

$$\Rightarrow A \cong C_0(\Omega) \quad \text{für lokalkompaktes } \Omega$$

1.19. Satz: Sei $\varphi : A \to B$ ein injektiver $*$-Homomorphismus zwischen C^*-Algebren A und B, so ist φ isometrisch.

~~1.20 Folgerung: Sind zwei C^*-Algebren A und B isomorph, so erhält der $*$-Isomorphismus auch die Norm.~~

<u>Beweis</u>: Sei $a \in A$, z.z.: $\|\varphi(a)\|^2 = \|a\|^2$

$$\|\varphi(a)\|^2 = \|\varphi(a^*a)\|, \qquad \|a\|^2 = \|a^*a\|$$

$\rightsquigarrow$ o.E. A kommutativ ($A \rightsquigarrow C(a^*a)$)

B kommutativ ($B \rightsquigarrow \overline{\varphi(A)}$)

A, B, φ unital (sonst betrachte $\tilde{\varphi} : \tilde{A} \to \tilde{B}$)

Somit $A \cong C(\Omega(A))$

$B \cong C(\Omega(B))$

Sei $\tau \in \Omega(B) \Rightarrow \tau \circ \varphi \in \Omega(A)$

Die Abb.

$$\varphi' : \Omega(B) \to \Omega(A)$$
$$\tau \mapsto \tau \circ \varphi$$

ist stetig, da $\tau_n \to \tau \Rightarrow \tau_n \circ \varphi \to \tau \circ \varphi$

(denn: $\tau_n \to \tau \Leftrightarrow \tau_n(b) \to \tau(b) \quad \forall b \in B$

$$\tau_n(b) = \hat{b}(\tau_n), \qquad \tau(b) = \hat{b}(\tau)$$

also: $(\tau_n \circ \varphi)(a) = \tau_n(\varphi(a)) \to \tau(\varphi(a)) = (\tau \circ \varphi)(a) \quad \forall a \in A$

d.h. $\tau_n \circ \varphi \to \tau \circ \varphi$)

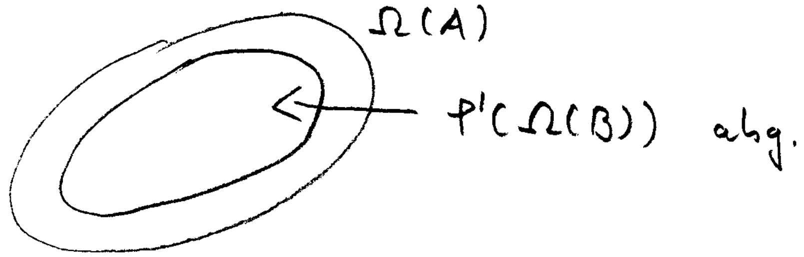
$\Omega(B)$ kompakt $\Rightarrow \varphi'(\Omega(B)) \subset \Omega(A)$

kompakt,

also abg. in $\Omega(A)$

<u>Beh</u>: $\varphi'(\Omega(B)) = \Omega(A)$, d.h. φ' surjektiv

denn: Sei $\varphi'(\Omega(B)) \subsetneqq \Omega(A)$



$\overset{\text{Urysohn}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ stetige Fkt $f : \Omega(A) \to \mathbb{C}$ mit

- $f \neq 0$
- $f|_{\varphi'(\Omega(B))} \equiv 0$

Gelfand-Isomorph $\Rightarrow$ $f = \hat{a}$ für ein $a \in A$

Sei nun $\tau \in \Omega(B)$

$$\Rightarrow \tau(\varphi(a)) = (\tau \circ \varphi)(a) = \hat{a}(\underbrace{\tau \circ \varphi}_{\in \varphi'(\Omega(B))}) = 0$$

$$\Rightarrow \tau(\varphi(a)) = 0 \quad \forall \tau \in \Omega(B)$$

$$\Rightarrow \varphi(a) = 0 \qquad \left(\text{da } \widehat{\varphi(a)}(\tau) = \tau(\varphi(a)) = 0\right)$$

$\overset{\varphi \text{ injektiv}}{\Longrightarrow}$ $a = 0$

$$\Rightarrow f \equiv 0 \quad ↯$$

$$\Rightarrow \varphi'(\Omega(B)) = \Omega(A)$$

d.h. $\tau' \in \Omega(A) \Rightarrow \exists \tau \in \Omega(B) : \tau' = \tau \circ \varphi$

Sei nun $a \in A$

$$\|a\| = \|\hat{a}\|_\infty = \sup_{\tau' \in \Omega(A)} |\tau'(a)| = \sup_{\tau \in \Omega(B)} |\underbrace{\tau \circ \varphi(a)}_{\tau(\varphi(a))}| = \|\widehat{\varphi(a)}\|_\infty = \|\varphi(a)\|$$

□

1.20 Folgerung: Seien zwei kommutative C^*-Algebren A und B isomorph vermöge $\varphi: A \to B$.
Dann ist

$$\varphi': \Omega(B) \to \Omega(A)$$
$$\tau \mapsto \tau \circ \varphi$$

ein Homöomorphismus (d.h. φ', φ'^{-1} stetig)

Beweis: o.E. A, B, φ unital

nach 2.2: φ' injektiv

Sei $\varphi'(\tau_1) = \varphi'(\tau_2)$

$$\Rightarrow \tau_1 \circ \varphi = \tau_2 \circ \varphi$$

$$\Rightarrow \tau_1(\varphi(a)) = \tau_2(\varphi(a)) \quad \forall a \in A$$

$$\overset{\varphi \text{ Iso}}{\Longrightarrow} \tau_1(b) = \tau_2(b) \quad \forall b \in B$$

$$\Rightarrow \tau_1 = \tau_2$$ □

1.21. Bemerkung: Da die Umkehrung von 1.20 trivialerweise gilt

($\varphi': \Omega_2 \to \Omega_1$ Homöomorphismus

$$\Rightarrow \quad C_0(\Omega_1) \cong C_0(\Omega_1)$$

vermöge des $*$-Isomorphismus

$$\varphi: C_0(\Omega_1) \to C_0(\Omega_2)$$
$$f \mapsto f \circ \varphi' \quad)$$

entsprechen sich also

kommutative C^*-Algebren $\hat{=}$ Topologie (lokalkompakter Räume)

In diesem Sinne wird die allgemeine Theorie von C^*-Algebren oft als <u>nichtkommutative Topologie</u> angesehen.

<u>1.22. Erinnerung</u>: stetiger Funktionalkalkül für normale Elemente

Sei A eine C^*-Algebra mit 1 und $a \in A$ normal.

Dann gibt es genau einen $*$-Homomorphismus

$$\Phi : C(\sigma(a)) \to A$$
$$f \mapsto \Phi(f) =: f(a)$$

mit $\Phi(z) = a$ (wobei $z(\lambda) = \lambda$)

Φ ist isometrisch, d.h.

$$\| f(a) \| = \| f \|_{C(\sigma(a))} = \sup_{t \in \sigma(a)} | f(t) |$$

und

$$\operatorname{ran} \Phi = C^*(1,a) = \overline{\{ \text{Polynome in } 1, a, a^* \}}^{\|\cdot\|}$$

ist die kleinste C^*-Algebra ($\subset A$), die 1 und a enthält.

(beachte: $C^*(1,a)$ ist kommutativ)

Idee: $p(\lambda) = \sum \alpha_{k,l} \lambda^k \bar{\lambda}^l \Rightarrow p(a) = \sum \alpha_{k,l} a^k (a^*)^l$

zeige: $\| p(a) \| = \sup_{t \in \sigma(a)} | f(t) |$ (z.B. mit Gelfand-Darstell.)

Approximiere beliebige stetige $f \in C(\sigma(a))$ glm durch Polynome p_n (Stone-Weierstraß)

$p_n \to f$ glm $\Rightarrow p_n(a) \to f(a)$

also: A C^*-Algebra mit Eins, $a \in A$ normal

$\Rightarrow$ Wir können für stetige $f \in C(\sigma(a))$ den Operator $f(a)$ bilden

z.B. $a = a^*$ s.a. $\rightsquigarrow$ $a_+ := \max(a, 0)$

$a_- := \min(a, 0)$

$|a|$

$a \geq 0 \rightsquigarrow \sqrt{a}$

Sei nun A C^*-Algebra ohne 1

Betrachte $A \subset \tilde{A}$ und setze

$\sigma(a) := \sigma_{\tilde{A}}(a)$ für $a \in A$

beachte: $0 \in \sigma(a)$, da a nicht invertierbar

(sonst $\underbrace{(a,0)(b,\lambda)}_{= (\ldots, 0)} = (0,1)$)

23.4

Frage: Wann ist $f(a) \in A$

Es gilt: $f(a,0) = (\cdots, f(0))$ für $f \in C(\sigma(a))$

da dies richtig für Polynome

$p \equiv \text{const} \Rightarrow p(a) = (0, \text{const})$

$p(\lambda) = \lambda^k \bar{\lambda}^\ell \Rightarrow p(a) = (a,0)^k (a^*, 0)^\ell = (a^k a^{*\ell}, 0)$

also: $f(a) \in A \Leftrightarrow f(0) = 0$

1.23. Satz: Sei A eine C^*-Algebra ohne 1 und $a \in A$ normal.

Dann gibt es genau einen $*$-Homomorphismus

$$\Phi : \left\{ f : \sigma(a) \to \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ stetig} \\ f(0) = 0 \end{array} \right\} \to A$$

$$f \mapsto \Phi(f) =: f(a)$$

mit $\Phi(z) = a$

Φ ist isometrisch und

$$\operatorname{ran} \Phi = C^*(a) = \overline{\left\{ \begin{array}{l} \text{Polynome in } a, a^* \\ \text{ohne konstanten Term} \end{array} \right\}}^{\|\cdot\|}$$

ist die kleinste C^*-Algebra, die a enthält.

also: A C^*-Algebra ohne 1, $a \in A$ normal

$\Rightarrow$ Wir können für stetige $f \in C(\sigma(a))$ mit $f(0) = 0$ den Operator $f(a) \in A$ bilden

beachte: falls $f(0) \neq 0$, so ist $f(a)$ natürlich noch in $\tilde{A}$ definiert, aber nicht in A

Beispiel: $A = \mathcal{K}(\mathcal{H})$, $a \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ kompakter s.a. Operator

$\Rightarrow a^2 \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, aber $1 + a^2 \in B(\mathcal{H})$

$\notin \mathcal{K}(\mathcal{H})$ $\quad (\dim \mathcal{H} = \infty)$