3. Approximierende Einsen, Ideale und Quotienten

3.1. Def. 1) Sei A C^*-Algebra. Eine Unteralgebra $I \subset A$ heißt Ideal in A, falls gilt:

$$b \in I,\ a \in A \Rightarrow \begin{array}{ll} b \cdot a \in I & \text{(Rechtsideal)} \\ a\, b \in I & \text{(Linksideal)} \end{array}$$

Notation: $I \trianglelefteq A$

2) $I = \{0\}$ und $I = A$ heißen triviale Ideale, $I \neq \{0\}, A$ heißen eigentliche (proper) Ideale.

3) Eine C^*-Algebra A heißt einfach, falls sie keine eigentlichen abg. Ideale besitzt.

3.2. Bem.: beachte: Wir haben weder Abgeschlossenheit noch $I = I^*$ gefordert.

Wir werden aber zeigen: I abgeschlossen $\Rightarrow I = I^*$

3.3. Beispiele: 1) $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ ist Ideal in $B(\mathcal{H})$

2) $I = \{ f \in C_0(\Omega) \mid f(t) = 0$ für $t \in K \}$ ist für $K \subset \Omega$ Ideal in $C_0(\Omega)$

3.4. Def.: 1) Sei X eine Menge. Ein Netz $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ besteht aus

- einer gerichteten Indexmenge Λ (d.h. $\exists$ partielle Ordnung "$\leq$" auf Λ mit: $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda \Rightarrow \exists \lambda_3 \in \Lambda$: $\lambda_3 \geq \lambda_1$, $\lambda_3 \geq \lambda_2$)
- Elementen $x_\lambda \in X$

2) Sei X ein topologischer Raum und $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ Netz in X. Dann *konvergiert* (x_λ) gegen $x \in X$, falls für jede Umgebung U von x es ein $\lambda_0 \in \Lambda$ gibt mit:

$$x_\lambda \in U \quad \forall \, \lambda \geq \lambda_0$$

Notation: $x = \lim\limits_{\lambda} x_\lambda$

3) Sei A eine C^*-Algebra. Eine *approximierende Eins für A* ist ein wachsendes Netz $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ in A mit

- $0 \leq u_\lambda \leq 1 \quad \forall \, \lambda \in \Lambda$
- $u_{\lambda_1} \leq u_{\lambda_2} \quad \forall \, \lambda_1 \leq \lambda_2$
- $a = \lim\limits_{\lambda} a u_\lambda$, $\quad a = \lim\limits_{\lambda} u_\lambda a \quad \forall \, a \in A$

4) analoge Def. für *approximierende Eins für I*, wobei I Ideal in einer C^*-Algebra B

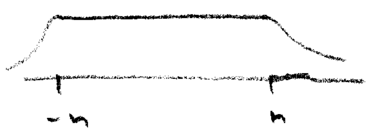
3.5. Beispiele: 1) Falls A mit 1 $\Rightarrow$ $u_\lambda = 1$ ist trivialerweise appr. Eins.

2) Sei $A = \mathcal{K}(\mathcal{H})$ mit $\mathcal{H}$ separabler HR, $\dim \mathcal{H} = \infty$

$(e_n)_{n=1}^{\infty}$ ONB

Sei p_n orth. Projektion auf $\mathcal{H}_n = \mathbb{C}e_1 + \dots + \mathbb{C}e_n$

$\Rightarrow (p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appr. Eins in $\mathcal{K}(\mathcal{H})$

3) Sei $A = C_0(\mathbb{R})$, $\quad f_n =$ 

$\Rightarrow (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appr. Eins in $C_0(\mathbb{R})$

<u>3.6. Satz:</u> 1) Sei A C^*-Algebra. Dann existiert eine approximierende Eins für A. Genauer: Sei $\Lambda = \{a \in A^+ \mid \|a\| < 1\}$

Dann ist $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ mit $u_a = a$ für $a \in \Lambda$ eine appr. Eins für A.

2) Falls A separabel ist (d.h. $\exists$ dichte abzählbare Teilmenge), so gibt es appr. Eins, welche Folge ist.

<u>Beweis:</u> 1) i) Λ ist partiell geordnet

z.z.: Λ ist gerichtet!

Sei $a, b \in \Lambda$, d.h. $0 \leq a, b$ $\quad \|a\|, \|b\| < 1$

z.z.: $\exists$ $c \geq 0$, $\|c\| < 1$: $a \leq c$, $b \leq c$

Idee: Schreibe $a = \dfrac{a'}{1+a'}$, $b = \dfrac{b'}{1+b'}$ $\quad$ (in $\tilde{A}$)

Setze $c := \dfrac{a'+b'}{1+a'+b'}$

Def.: $a' := a\underbrace{(1-a)^{-1}}_{\substack{\text{existiert,}\\ \text{da } \|a\|<1}}$, $b' := b(1-b)^{-1}$ $\quad \in \tilde{A}$

$\Rightarrow$ - $a', b' \geq 0$ und $a', b' \in A$ $\quad$ (nicht nur $\tilde{A}$) $\quad$ (Fkt-kal.)

- $a'(1-a) = a \Rightarrow a' = a'a + a = \underbrace{(a'+1)}_{\text{invertierbar, da } a' \geq 0} a$

$\Rightarrow a = (1+a')^{-1} a' = a'(1+a')^{-1}$

analog: $b = b'(1+b')^{-1}$

Setze $c := \dfrac{a'+b'}{1+a'+b'}$ $\Rightarrow c \in \Lambda$ $\quad$ (Fkt-kal.)

noch z.z.: $a, b \leq c$

$0 \leq a' \leq a' + b'$ (da $b' \geq 0$)

$$\overset{\nabla}{\overset{\cdot}{\Longrightarrow}} \underbrace{\frac{a'}{1+a'}}_{= a} \leq \underbrace{\frac{a'+b'}{1+a'+b'}}_{= c}$$

also allgemein z.z.: $0 \leq x \leq y \overset{\nabla}{\overset{\cdot}{\Longrightarrow}} x(1+x)^{-1} \leq y(1+y)^{-1}$

Sei $0 \leq x \leq y \Rightarrow 1+x \leq 1+y$

$$\overset{2.11}{\Longrightarrow} (1+x)^{-1} \geq (1+y)^{-1}$$

$$\Rightarrow \underbrace{1-(1+x)^{-1}}_{x(1+x)^{-1}} \leq \underbrace{1-(1+y)^{-1}}_{y(1+y)^{-1}}$$

$$\Big(1-(1+x)^{-1} =: r \Rightarrow 1+x-1 = r(1+x)$$
$$\Rightarrow r = x(1+x)^{-1} \Big)$$

$\Rightarrow \Lambda$ ist gerichtet

ii) noch z.z.: $a = \lim_\lambda u_\lambda a \quad \forall a \in A$

$$(\Rightarrow a^* = \lim_\lambda a^* u_\lambda^* = \lim_\lambda a^* u_\lambda \quad \forall a^* \in A)$$

Schreibe beliebiges $a \in A$ als

$a = c + id$ mit $c = c^*, d = d^*$

$= (c^+ - c^-) + i(d^+ - d^-)$ mit $c^+, c^-, d^+, d^- \geq 0$

also reicht es, Beh. für $a \geq 0$ z.z.

Sei auch $\|a\| \leq 1$

Sei also $0 \leq a \leq 1$

Betrachte $(u_\lambda a)_{\lambda \in \Lambda}$, z.z. $\lim_\lambda u_\lambda a = a$

Sei $\varepsilon > 0$, dann müssen wir zeigen

$\exists \lambda_0 \in \Lambda : \lambda \geq \lambda_0 \Rightarrow \| a - u_\lambda a \| \leq \varepsilon$

Setze $\lambda_0 := a(\varepsilon + a)^{-1} \in \Lambda \quad (\|\lambda_0\| < 1)$

$\overset{\shortparallel}{u_{\lambda_0}}$

Dann gilt

$$0 \leq a - u_{\lambda_0} a = a - a(\varepsilon + a)^{-1} a \leq \varepsilon \cdot 1$$

denn (Fkt-Kalkül)

$$y - \frac{y^2}{\varepsilon + y} = \frac{\varepsilon y + y^2 - y^2}{\varepsilon + y} = \frac{\varepsilon y}{\varepsilon + y} = \frac{\varepsilon}{\frac{\varepsilon}{y} + 1} \leq \varepsilon \qquad (y = \hat{a}(t) \geq 0)$$

also: $\| a - u_{\lambda_0} a \| \leq \varepsilon$

Sei nun $c = \lambda \geq \lambda_0 = a(\varepsilon + a)^{-1} \qquad (c \geq 0, \|c\| < 1)$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \| a - u_\lambda a \|^2 &= \| a - ca \|^2 \\
&= \| (1-c) a \|^2 \\
&= \| a (1-c)^2 a \| \\
&\leq \| a (1-c) a \|
\end{aligned}$$

$\Leftarrow \begin{pmatrix} (1-c)^2 \leq 1-c & \\ \Rightarrow a(1-c)^2 a \leq a(1-c)a & (2.11) \\ \Rightarrow \| \dots \| \leq \| \dots \| & (2.11) \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
&\leq \| a (1 - a(\varepsilon+a)^{-1}) a \| \qquad (\text{da } 1 - c \leq 1 - a(\varepsilon+a)^{-1}) \\
&\leq \underbrace{\|a\|}_{\leq 1} \underbrace{\| a - a(\varepsilon+a)^{-1} a \|}_{\leq \varepsilon} \\
&\leq \varepsilon \qquad \Rightarrow \lim_\lambda u_\lambda a = a
\end{aligned}$$

2) Sei $a_1, a_2, a_3, \ldots$ dichte Folge in A und $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ beliebige appr. Eins für A

Bestimme dann sukzessive

$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots$ mit

$$\|u_\lambda a_i - a_i\| \leq \frac{1}{n} \qquad \forall \lambda \geq \lambda_n, \ \forall i = 1, \ldots, n$$

$$\|a_i u_\lambda - a_i\| \leq \frac{1}{n}$$

Setze nun $v_n := u_{\lambda_n}$

$\Rightarrow (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ approx. Eins

denn: Sei $a \in A$, wähle k mit $\|a - a_k\| \leq \varepsilon$

$$\Rightarrow \|v_n a - a\| \leq \underbrace{\|v_n a - v_n a_k\|}_{\substack{\leq \|v_n\| \|a - a_k\| \\ \leq \varepsilon}} + \underbrace{\|v_n a_k - a_k\|}_{\substack{\leq \frac{1}{n} \\ \text{falls } n \geq k}} + \underbrace{\|a_k - a_n\|}_{\leq \varepsilon}$$

beliebig klein für hinr. großes n

$\square$

3.7. Folgerung: Sei I ein abgeschlossenes Ideal in einer C^*-Algebra A.

1) Es existiert eine appr. Eins von I, d.h. ein wachsendes Netz $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, $0 \leq u_\lambda \leq 1$, $u_\lambda \in I$ $(\lambda \in \Lambda)$, so daß

$$a = \lim_\lambda a u_\lambda = \lim_\lambda u_\lambda a \qquad \forall a \in I$$

2) I ist selbstadjungiert (d.h. $a \in I \Rightarrow a^* \in I$) und somit eine C^*-Unteralgebra von A

__Beweis:__ 1) Setze $I^* := \{a^* \mid a \in I\}$ und

$B := I \cap I^*$

B ist C^*-Algebra $\overset{3.6}{\Longrightarrow}$ $\exists$ appr. Eins $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$

Beh.: $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ist auch appr. Eins für I

Sei $a \in I \Rightarrow a^*a \in I$, a^*a s.a. $\Rightarrow a^*a \in I \cap I^* = B$

$\Rightarrow \lim_\lambda \| a^*a(1-u_\lambda)\| = 0$

Nun gilt:

$$\lim_\lambda \|a - au_\lambda\|^2 = \lim_\lambda \underbrace{\|(1-u_\lambda)a^*a(1-u_\lambda)\|}_{\leq \underbrace{\|1-u_\lambda\|}_{\leq 1} \|a^*a(1-u_\lambda)\|}$$

$$= 0$$

d.h. $\lim_\lambda au_\lambda = a$

analog: $\lim_\lambda u_\lambda a = a$

2) Sei $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ appr. Eins für I und $a \in I$

$\Rightarrow a = \lim_\lambda a u_\lambda$

$\Rightarrow a^* = \lim_\lambda u_\lambda^* a^* = \lim_\lambda \underbrace{u_\lambda a^*}_{\in I}$ da $u_\lambda \in I$

$\Rightarrow a^* \in I$, da I abgeschlossen

$\square$

3.8. Folgerung: Sei I ein abgeschlossenes Ideal in einer C^*-Algebra A und J ein abgeschlossenes Ideal in I, $J \trianglelefteq I \trianglelefteq A$. Dann ist J auch ein Ideal in A.

Beweis: Sei $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ appr. Eins für I

$$\text{Sei } \left.\begin{matrix} b \in J \\ a \in A \end{matrix}\right\} \overset{!}{\Longrightarrow} \begin{matrix} ab \in J \\ ba \in J \end{matrix}$$

$$b u_\lambda \to b \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\underbrace{\overset{J}{\overset{\cup}{b}} \, \overset{I}{\overset{\cup}{u_\lambda}}}_{\in I} \, \overset{A}{\overset{\cup}{a}}}_{\in J} \to ba \overset{J \text{ abg.}}{\Longrightarrow} ba \in J$$

$$\text{analog: } \underbrace{\underbrace{a u_\lambda}_{\in I} b}_{\in J} \to ab \quad \Rightarrow \quad ab \in J$$

□

3.9. Erinnerung: Sei A eine Banachalgebra (o.E. mit Eins) und I ein abgeschlossenes Ideal in A. Dann wird der Quotientenraum

$$A/I := \{a + I \mid a \in A\} \qquad (a + I = b + I \Leftrightarrow a - b \in I)$$

mit den Operationen

$$\lambda(a + I) := \lambda a + I$$

$$(a + I) + (b + I) := (a + b) + I$$

$$(a + I) \cdot (b + I) := ab + I$$

und der Norm

$$\|a + I\| := \inf_{b \in I} \|a + b\|$$

zu einer Banachalgebra

3.10. Satz: Sei A eine C^*-Algebra und $I \triangleleft A$ ein abgeschlossenes Ideal.

1) Ist $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine appr. Eins für I, dann gilt

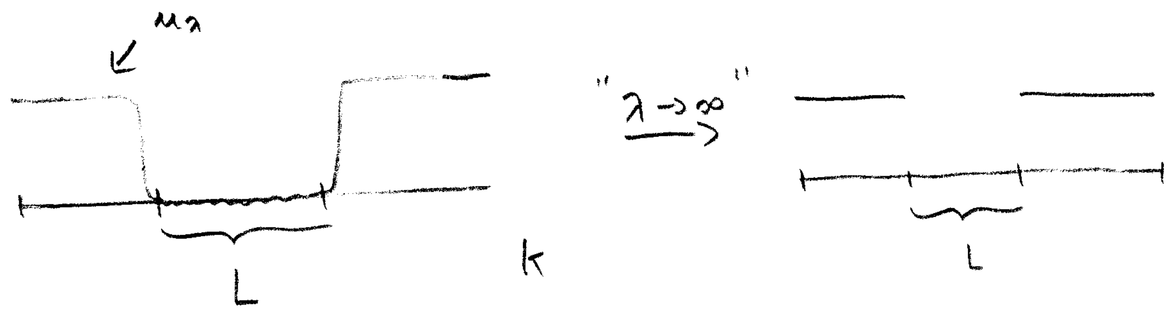
$$\|a+I\| = \lim_\lambda \|a - u_\lambda a\| = \lim_\lambda \|a - a u_\lambda\| \quad \forall a \in A$$

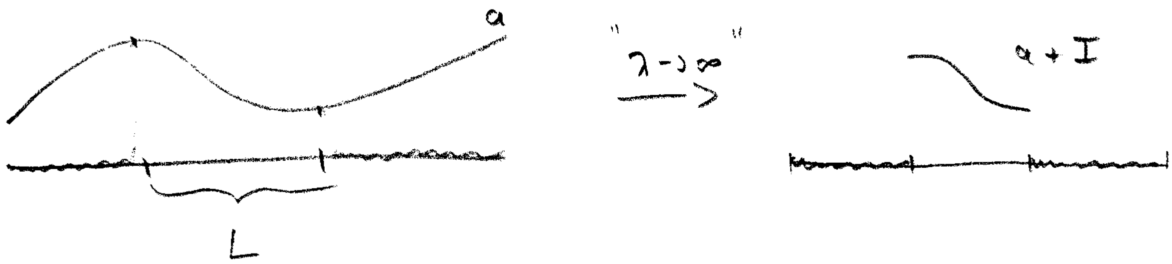
2) A/I wird, versehen mit den Strukturen aus 3.9. und der Involution

$$(a+I)^* := a^* + I \quad (a \in A),$$

zu einer C^*-Algebra.

Beispiel zu 1): $A = C(K)$, $I = \{f \mid f(t) = 0 \ \forall t \in L\}$ für $L \subset K$ abgeschlossen





$$C(K)/I \cong C(L)$$

<u>Beweis:</u> Sei $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ appr. Eins für I und $a \in A$.

Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists b \in I: \|a+b\| < \|a+I\| + \varepsilon/2$

Da $b = \lim_\lambda u_\lambda b \Rightarrow \exists \lambda_0 \in \Lambda: \|b - u_\lambda b\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall \lambda \geq \lambda_0$

also: $\|a - u_\lambda a\| \leq \underbrace{\|(1-u_\lambda)(a+b)\|}_{\leq \underbrace{\|1-u_\lambda\|}_{\leq 1} \underbrace{\|a+b\|}_{< \|a+I\| + \frac{\varepsilon}{2}}} + \underbrace{\|b - u_\lambda b\|}_{< \frac{\varepsilon}{2} \quad (\lambda \geq \lambda_0)}$

$$\leq \|a+I\| + \varepsilon \qquad \text{für } \lambda \geq \lambda_0$$

Da außerdem $\|a+I\| \leq \|a - \underbrace{u_\lambda a}_{\in I}\|$

$\Rightarrow \quad \lim\limits_\lambda \|a - u_\lambda a\| = \|a+I\|$

und andere Reihenfolge:

$\|a+I\| = \|a^* + I\| = \underbrace{\lim \|a^* - \underbrace{u_\lambda a^*}_{(a u_\lambda)^*}\|}_{\|a - a u_\lambda\|}$

2) beachte: * wohldefiniert, da $I = I^*$ (3.7.)

noch z.z.: $\|a+I\|^2 = \|(a+I)^*(a+I)\|$

reicht "$\leq$" nach 1.4.

Sei $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ appr. Eins für I. Dann gilt für $a \in A$:

$\|a+I\|^2 = \lim\limits_\lambda \|a - a u_\lambda\|^2$

$= \lim\limits_\lambda \|(1-u_\lambda) a^* a (1-u_\lambda)\|$

$= \lim\limits_\lambda \|(1-u_\lambda)(a^* a + b)(1-u_\lambda)\|$ für bel. $b \in I$

da $(1-u_\lambda) b = b - u_\lambda b \to 0$

$\leq \|a^* a + b\| \qquad \forall b \in I$

$$\Rightarrow \|a+I\|^2 \leq \|\underbrace{a^*a+I}_{(a^*+I)(a+I)}\| = \|(a+I)^*(a+I)\|$$

$\Rightarrow$ Beh. $\square$

3.11. Satz: Sei $\varphi: A \to B$ ein $*$-Homomorphismus zwischen C^*-Algebren A und B. Dann ist $\varphi(A) \subset B$ eine C^*-Algebra und

$$\varphi(A) \cong A/\ker\varphi$$

Beweis: Beachte: $\ker\varphi$ ist abgeschl. Ideal in A

Betrachte die Abb.

$$\psi: A/\ker\varphi \longrightarrow B$$
$$a+\ker\varphi \longmapsto \varphi(a)$$

ψ ist $*$-Homomorphismus: z. B.

$$\begin{aligned}\psi((a+\ker\varphi)(b+\ker\varphi)) &= \psi(ab+\ker\varphi)\\ &= \varphi(ab)\\ &= \varphi(a)\varphi(b)\\ &= \psi(a+\ker\varphi)\,\psi(b+\ker\varphi)\end{aligned}$$

ψ ist injektiv: $\underbrace{\psi(a+\ker\varphi)}_{\varphi(a)} = 0 \Rightarrow a \in \ker\varphi$, d. h. $a+\ker\varphi \equiv 0$ in $A/\ker\varphi$

$\overset{119}{\Rightarrow}$ ψ isometrisch, d. h. $\operatorname{ran}\psi = \operatorname{ran}\varphi = \varphi(A)$ vollständig (also abgeschlossen in B)

$\Rightarrow \varphi(A)$ ist C^*-Algebra

ψ injektiv $\Rightarrow A/\ker\varphi \cong \operatorname{ran}\psi = \varphi(A)$ $\square$

<u>3.12 Def.</u>: Sei $\mathcal{H}$ separabler HR mit $\dim \mathcal{H} = \infty$.

Die C^*-Algebra

$$\mathcal{C}(\mathcal{H}) := B(\mathcal{H}) / \mathcal{K}(\mathcal{H})$$

heißt <u>Calkin-Algebra</u>.

<u>3.13 Bem.</u>: 1) $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ ist eine einfache C^*-Algebra.

2) Eine wichtige Klasse von Operatoren hängt eng mit $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ zusammen: Sei $u \in B(\mathcal{H})$, dann

u <u>Fredholm Operator</u> $:\Longleftrightarrow$ ran u abgeschlossen, $\dim \ker u < \infty$, $\dim \ker u^* < \infty$

$\Longleftrightarrow$ $u + \mathcal{K}(\mathcal{H})$ invertierbar in $\mathcal{C}(\mathcal{H})$