7. Endlich-dimensionale C^*-Algebren

7.1. Lemma: A sei endlich-dimensionale C^*-Algebra.

Dann gilt:

i) A ist unital

ii) Jedes Ideal I in A ist von der Form

$$I = Ap \quad \text{mit} \quad p \in A \text{ zentrale Projektion}$$
$$(\text{d.h. } pa = ap \quad \forall\, a \in A)$$

Beweis: i) Sei (u_λ) appr. Eins von A (Folge, da A separabel)

$\Rightarrow$ $(u_\lambda) \subset K_1(A) := \{a \in A \mid \|a\| \leq 1\}$ kompakt,

da A endlich-dimensionaler Banachraum

$\Rightarrow$ $\exists$ konvergente Teilfolge $u_{\lambda_i} \to u \in A$

und $ua = au = a \quad \forall a \in A$

$\Rightarrow u = 1$

$\Rightarrow 1 \in A$

ii) $I \subset A$ Unter-C^*-Algebra

$\overset{i)}{\Rightarrow}$ I besitzt Eins p orthog. Projektion: $p^2 = p = p^*$

Sei $a \in A \Rightarrow ap \in I \Rightarrow p(ap) = ap$

$\Rightarrow pa^* = (ap)^* = pa^*p = a^*p \qquad \forall\, a^* \in A$

$\square$

7.2. Satz: Sei A endlich-dimensionale C^*-Algebra. Dann gibt es zentrale Projektionen $p_1, \ldots, p_m$ mit

$$p_i p_j = 0 \quad (i \neq j) \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{m} p_k = 1, \text{ so daß}$$

$$A = \sum_{k=1}^{m} A p_k \quad \left(= \bigoplus_{k=1}^{m} A p_k \right)$$

und alle $A p_k$ sind einfache C^*-Algebren

Beweis: Sei

$Z(A) := \{ b \in A \mid ab = ba \ \forall a \in A \}$ Zentrum von A

$\Rightarrow Z(A)$ kommutative C^*-Algebra $\Rightarrow Z(A) \mathrel{\hat{=}} C(\Omega)$

A endlich-dimensional $\Rightarrow Z(A)$ endlich-dimensional

$\Rightarrow \Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$ endliche Menge

Setze $p_k := \chi_{\omega_k}$, d.h. $p_k(\omega_j) = \delta_{kj}$

$\Rightarrow p_k$ Projektion, $p_i p_j = 0 \ (i \neq j)$, $\sum_{k=1}^{m} p_k = 1$

und $A = A \cdot 1 = \sum_{k=1}^{m} A p_k$

noch z.z.: $A p_k$ einfach

gilt, da: $Z(A p_k) \subset \underbrace{Z(A) p_k}_{= \mathbb{C} p_k}$ $\quad$ ($x \in Z(A p_k) \Rightarrow x = a p_k$ und $\underbrace{a p_k b p_k}_{a p_k^2 b = xb} = \underbrace{b p_k a p_k}_{b a p_k^2 = bx}$

$\Rightarrow x \in Z(A)$

$\Rightarrow x = x p_k \in Z(A) p_k$)

$\Rightarrow Z(A p_k) = \mathbb{C} p_k$

Sei $I \trianglelefteq A p_k \overset{7.1.}{\Rightarrow} I = A p_k p$ mit $p \in Z(A p_k)$ Proj. $\Rightarrow p = \begin{cases} 0 \\ p_k \end{cases}$ $\square$

7.3. Satz: Sei A eine einfache endlich-dimensionale C^*-Algebra. Dann ist A isomorph zu $M_n(\mathbb{C})$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Sei $\pi : A \to B(\mathcal{H})$ irreduzible Darstellung

$$\Rightarrow \quad \mathcal{H} = \overline{\pi(A)\xi} \qquad \text{für ein (bzw. sogar alle) } \xi \in \mathcal{H},\ \xi \neq 0$$

$$= \pi(A)\xi$$

endlichdimensional, da A endlich-dimensional

(d.h. $\exists\, x_1, \dots, x_k$ mit $a = \sum \alpha_k x_k$ $\forall a \in A$)

also: $\pi(A) \subset B(\mathcal{H})$ mit $\dim \mathcal{H} < \infty$

$\ker \pi$ ist abgeschl. Ideal in A

A einfach $\Rightarrow \ker \pi = \{0\} \Rightarrow \pi$ injektiv

$\Rightarrow A \cong \pi(A) \subset B(\mathcal{H}) \cong M_n(\mathbb{C})$ wobei $n = \dim \mathcal{H}$

$\Rightarrow A \cong M_n(\mathbb{C})$

(benutze z.B. Aufgabe 8: $\pi(A) \cap \mathcal{K}(\mathcal{H}) = \pi(A) \cap B(\mathcal{H}) \neq \emptyset$

$\Rightarrow \underbrace{\mathcal{K}(\mathcal{H})}_{= B(\mathcal{H})} \subset \pi(A)$

$\Rightarrow \pi(A) = B(\mathcal{H})$)

$\square$

7.4. Folgerung (Satz von Wedderburn): Sei A eine endlich-dimensionale C^*-Algebra. Dann gibt es $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$, so daß

$$A \cong M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \dots \oplus M_{n_m}(\mathbb{C}).$$

Diese Darstellung ist bis auf Permutation der Summanden eindeutig.

7.5 Def.: Seien p, q Projektionen in einer C^*-Algebra A. Wir sagen: p und q sind (Murray-von Neumann) äquivalent ($p \sim q$), falls es ein $u \in A$ gibt mit

$$p = u^* u \quad \text{und} \quad q = u u^*$$

7.6 Lemma: Sei A C^*-Algebra und $u \in A$. Es sind äquivalent:

a) $u = u u^* u$

b) $u^* u$ ist Projektion

c) $u u^*$ ist Projektion

Beweis: a) $\Rightarrow$ b) Sei $p := u^* u \Rightarrow p^* = p$ und

$$p^2 = u^* \underbrace{u u^* u}_{u} = u^* u = p$$

b) $\Rightarrow$ c) Sei $p := u^* u$ Projektion; setze $q := u u^*$

$$\Rightarrow q^3 = u \underbrace{u^* u u^*}_{u^* u} u u^* = u u^* u u^* = q^2$$

$\Rightarrow \sigma(q) \subset \{0,1\} \Rightarrow q$ Projektion ($q \mathrel{\hat{=}}$ Fkt, die nur Werte 0,1 annimmt)

c) $\Rightarrow$ a) Sei $q := uu^*$ Projektion

z.z.: $(1-uu^*)u = 0$

$$\|(1-uu^*)u\|^2 = \|\underbrace{(1-uu^*)uu^*}_{uu^* - uu^*uu^* = 0}(1-uu^*)\| = 0$$

$\Rightarrow (1-uu^*)u = 0$ $\square$

<u>7.7. Lemma:</u> Ist $A = B(\mathcal{H})$ für einen HR $\mathcal{H}$ und $u \in B(\mathcal{H})$, so sind die drei Bedingungen aus 7.6. auch äquivalent zu

d) u ist partielle Isometrie, d.h. u ist isometrisch auf $(\ker u)^\perp$: $\|u\xi\| = \|\xi\|$ $\forall\, \xi \in (\ker u)^\perp$

<u>Beweis:</u> a) $\Rightarrow$ d) Es gilt: u^*u ist Projektion auf $(\ker u)^\perp$,

denn: $u^*u\,\xi = 0 \Rightarrow \underbrace{uu^*u}_{u}\,\xi = 0 \Rightarrow \xi \in \ker u$

"$\Leftarrow$" klar

Sei nun $\xi \in (\ker u)^\perp$

$$\Rightarrow \|u\xi\|^2 = \langle \underbrace{u^*u\,\xi}_{\xi}, \xi\rangle = \langle \xi, \xi\rangle = \|\xi\|^2$$

d) $\Rightarrow$ b) Sei u partielle Isometrie

Sei p die Projektion auf $(\ker u)^\perp$

wollen zeigen: $p = u^*u$, d.h. u^*u ist Projektion

Sei $\xi \in (\ker u)^\perp \Rightarrow$

$$\langle u^*u\,\xi, \xi\rangle = \langle u\xi, u\xi\rangle = \|u\xi\| = \|\xi\| = \langle \xi, \xi\rangle = \langle p\xi, \xi\rangle$$

Sei nun $\xi \in \ker u \Rightarrow$

$$\langle u^* u \xi, \xi \rangle = 0 = \langle p \xi, \xi \rangle$$

also:

$$\langle u^* u \xi, \xi \rangle = \langle p \xi, \xi \rangle \qquad \forall \xi \in \mathcal{H}$$

$$\Rightarrow u^* u = p$$

□

7.8 Lemma: Sei $A = B(\mathcal{H})$ für einen Hilbertraum $\mathcal{H}$ und $p, q \in B(\mathcal{H})$ Projektionen. Dann gilt

$$p \sim q \iff \dim p\mathcal{H} = \dim q\mathcal{H}$$

Beweis: "$\Rightarrow$" Sei $p = u^* u$, $q = u u^*$

Dann gilt

$$p\mathcal{H} = \operatorname{ran} u^* u = (\ker u)^\perp$$

$$q\mathcal{H} = \operatorname{ran} u u^* = (\ker u^*)^\perp = \operatorname{ran} u$$

Somit $u : p\mathcal{H} \to q\mathcal{H}$ isometrisch und bijektiv

d.h. $\dim p\mathcal{H} = \dim q\mathcal{H}$

"$\Leftarrow$" Sei $\dim p\mathcal{H} = \dim q\mathcal{H}$ mit entsprechenden Orthonormalbasen $\xi_1, \dots, \xi_n$ und $\eta_1, \dots, \eta_n$ (wobei $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$)

Definiere u durch

$$u(\xi_i) = \eta_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad \text{und} \quad u|(p\mathcal{H})^\perp \equiv 0$$

$$\Rightarrow u^*(\eta_i) = \xi_i \quad \text{und} \quad u^*|(q\mathcal{H})^\perp \equiv 0$$

$$\Rightarrow u^* u = p \quad \text{und} \quad u u^* = q$$

□

<u>7.9. Def.</u>: Eine Projektion $p \neq 0$ in einer C^*-Algebra A heißt <u>minimal</u>, falls gilt:

$$pAp = \mathbb{C}p$$

<u>7.10. Bem.</u>: 1) Beachte: pAp ist immer C^*-Algebra mit Eins p.

2) Sei p minimal und $0 \neq q \leq p$ mit q Projektion.

Dann ist $q = p$, denn:

$$pqp = q \in \mathbb{C}p \overset{q \neq 0}{\Longrightarrow} q = p$$

<u>7.11. Beispiel</u>: $A = M_3(\mathbb{C})$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{minimal}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ nicht minimal, da } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>7.12. Lemma</u>: Sei A eine einfache endlich-dimensionale C^*-Algebra.

1) Für alle $a, b \in A$ mit $a \neq 0 \neq b$ gilt

$aAb \neq \{0\}$ (d.h. $\exists x \in A: axb \neq 0$)

2) Seien p und q minimale Projektionen in A. Dann ist $p \sim q$.

<u>Beweis:</u> 1) Betrachte für $a \in A$ mit $a \neq 0$

$$AaA := \{ \sum_{i=1}^{n} x_i a y_i \mid n \in \mathbb{N}, x_i, y_i \in A \}$$

AaA ist Ideal, abgeschlossen (da A endlich-dim.) und $\neq \{0\}$

A einfach $\Rightarrow$ $AaA = A$

Sei nun $a, b \neq 0$ und $aAb = \{0\}$

$$\Rightarrow \underbrace{AaA}_{A} b = \{0\} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{AbA}_{A} = \{0\} \qquad \text{Wdsp}$$

Somit $aAb \neq \{0\}$

2) Seien p, q minimale Projektionen in A

$\Rightarrow$ $pAq \neq \{0\}$

d.h. $\exists y \in A : x := pyq \neq 0$

$$\Rightarrow xx^* = pyqy^*p \in pAp = \mathbb{C}p$$

$$\Rightarrow xx^* = \lambda p \qquad \text{mit } \lambda \neq 0$$

sogar $\lambda > 0$, da xx^* positiv

analog: $x^*x = qy^*pyq \in qAq = \mathbb{C}q$

$$\Rightarrow x^*x = \mu q \qquad \text{mit } \mu > 0$$

Setze $u := \frac{x}{\sqrt{\lambda}}$ $\Rightarrow$ $uu^* = p$, $u^*u = \frac{\mu}{\lambda} q$

$$uu^* \text{ Proj} \overset{7.6}{\Rightarrow} \underset{\frac{\mu}{\lambda} q}{\underset{\shortparallel}{u^*u}} \text{ Proj.} \Rightarrow \mu = \lambda$$

$\Rightarrow p \sim q$ $\square$

<u>7.13 Satz:</u> Sei A eine einfache endlich-dimensionale C^*-Algebra (also $A \cong M_n(\mathbb{C})$ für ein $n \in \mathbb{N}$) und $\pi : A \to B(\mathcal{H})$ eine $\overbrace{\text{Darstellung}}^{\text{nicht-entartete}}$ von A. Dann ist

$m_\pi := \dim \pi(p)\mathcal{H}$ (p minimale Projektion) <u>Vielfachheit der Darstellung</u>

unabhängig von der Wahl der minimalen Projektion p.
Es gilt $\dim \mathcal{H} = n \cdot m_\pi$ und m_π bestimmt die Darstellung bis auf unitäre Äquivalenz eindeutig. π ist genau dann irreduzibel, wenn $m_\pi = 1$.

<u>7.14 Beispiel:</u> $A = M_n(\mathbb{C})$

$\pi_1 : A \to M_n(\mathbb{C})$ identische Darstellung

$\quad a \mapsto a$ $\qquad m_{\pi_1} = 1$ irreduzibel

$\pi_2 : A \to M_{2n}(\mathbb{C})$

$\quad a \mapsto \left(\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & a \end{array}\right)$ $\qquad m_{\pi_2} = 2$

$\pi_3 : A \to M_{3n}(\mathbb{C})$

$\quad a \mapsto \begin{pmatrix} a & & 0 \\ & a & \\ 0 & & a \end{pmatrix}$ $\qquad m_{\pi_3} = 3$

usw.

$$\pi_\infty : A \to B(\underbrace{\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n \oplus \ldots}_{\infty\text{-fach}})$$

$$a \mapsto \begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & a & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \qquad m_{\pi_\infty} = \infty$$

<u>Beweis</u>: Seien p, q minimale Projektionen von A

$\overset{7.12}{\Longrightarrow}$ $p \sim q$, d.h. $\exists u \in A$: $uu^* = p$, $u^*u = q$

$\Rightarrow$ $\pi(u)\pi(u)^* = \pi(p)$, $\pi(u)^*\pi(u) = \pi(q)$

$\Rightarrow$ $\pi(p) \sim \pi(q)$ in $B(\mathcal{H})$, $\pi(p), \pi(q)$ Projektionen

$\overset{7.8}{\Longrightarrow}$ $\dim \pi(p)\mathcal{H} = \dim \pi(q)\mathcal{H}$

d.h. m_π wohldefiniert

Seien p_i $(i = 1, .., n)$ minimale Projektionen mit

$\sum p_i = 1$ und $p_i p_j = 0$ $(i \neq j)$

$\left(A \cong M_n, \quad p_i \cong \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \leftarrow i \right)$

$\Rightarrow \sum \pi(p_i) = \pi(1) = 1$ da π nicht-entartet

$\Rightarrow$ $\dim \mathcal{H} = \dim (\pi(p_1)\mathcal{H} \oplus \ldots \oplus \pi(p_n)\mathcal{H})$

$$= n \underbrace{\dim \pi(p_i)\mathcal{H}}_{m_\pi}$$

Seien nun $(\mathcal{H}_1, \pi_1)$ und $(\mathcal{H}_2, \pi_2)$ Darstellungen mit

$m_{\pi_1} = m_{\pi_2}$.

Zeige: $\exists u : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ unitär mit $\pi_1(a) = u^* \pi_2(a) u$

Übungsaufgabe!

($\leadsto$ Takesaki)

π irred. $\Leftrightarrow$ $m_\pi = 1$ klar nach 7.14

$\square$

7.15 Bem.: Analog kann die Darstellung einer beliebigen endlich-dimensionalen C^*-Algebra

$$A \cong M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{n_k}(\mathbb{C})$$

durch eine Folge von Vielfachheiten $(m_1, \dots, m_k)$ beschrieben werden.

Beispiel: $A = M_2(\mathbb{C}) \oplus M_3(\mathbb{C})$

$\pi : A \to M_5$

$a \oplus b \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ $\qquad m_\pi = (1,1)$ $\qquad$ reduzibel

$\pi : A \to M_2$

$a \oplus b \mapsto a$ $\qquad m_\pi = (1,0)$ $\qquad$ irreduzibel

$\pi : A \to M_3$

$a \oplus b \mapsto b$ $\qquad m_\pi = (0,1)$ $\qquad$ irreduzibel

$\pi : A \to M_{13}$

$$a \oplus b \mapsto \begin{pmatrix} a & & & & \\ & a & & & 0 \\ & & b & & \\ & 0 & & b & \\ & & & & b \end{pmatrix} \qquad m_\pi = (2,3)$$