§ 7 universelle C^*-Algebren und die Toeplitzalgebra $\mathcal{T}$

Erinnerung: Eine C^*-Algebra ist eine Algebra mit Involution, zusammen mit einer Norm, die $\|xy\| \le \|x\|\|y\|$ und $\|x^*x\| = \|x\|^2$ erfüllt, und bezüglich derer die Algebra vollständig ist. (Def. 2.1, Def. 3.1)
Das liefert einen Weg, eine C^*-Algebra allein aus Erzeugern und Relationen zu konstruieren, um somit gewisse Elemente bzw. C^*-algebraische Relationen in „Reinform" zu studieren.

7.1 Konstruktion einer universellen C^*-Algebra:

- Sei $E = \{x_i \mid i \in I\}$ eine Menge von Erzeugern, I Indexmenge
- Sei $P(E)$ die involutive Algebra der nichtkommutativen Polynome in $E \cup E^*$ (also $P(E) = \mathrm{Span}\{x_{i_1}^{a_1} x_{i_2}^{*a_2} \cdots x_{i_k}^{a_k} \mid \ldots\}$)
- Sei $R \subseteq P(E)$ eine Menge von Relationen
- Sei $\mathcal{J}(R) \subseteq P(E)$ das von R erzeugte Ideal in $P(E)$.
- Setze $A(E,R) := {}^{P(E)}/_{\mathcal{J}(R)}$, die „universelle involutive Algebra mit Erzeugern E und Relationen R".
- Setze $\|x\| := \sup\{p(x) \mid p \text{ ist } C^*\text{-Halbnorm auf } A(E,R)\}$ für $x \in A(E,R)$, wobei p Halbnormen mit $p(x^*x) = p(x)^2$ und $p(xy) \le p(x)p(y)$ sind.
  ($p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$, $p(x+y) \le p(x) + p(y)$)
- Ist $\|x\| < \infty$ für alle $x \in A(E,R)$, so setze

$$C^*(E \mid R) := \overline{{A(E,R)}/{\{x \in A(E,R) \mid \|x\| = 0\}}}^{\|\cdot\|} \quad \text{(Vervollständigung)}$$

die „universelle C^*-Algebra mit Erzeugern E und Relationen R".

7.2 <u>Bemerkung</u>: (a) Das ist das gleiche Prinzip (bloß abstrahiert) wie in Def. 3.16 und Bem. 3.17: Nehme nichtkommutative Polynome in $\{x_i \mid i\in I\}$ und $\{x_i^* \mid i\in I\}$, die gewisse Relationen erfüllen (z.B. $x_1^*x_1 = 1$, $x_2x_3 = x_4^2$ etc., d.h. die Polynome $x_1^*x_1 - 1$ und $x_2x_3 - x_4^2$ werden herausgeteilt), und statte sie mit einer maximalen Norm $\|\cdot\|$ aus. Damit diese wirklich eine Norm ist, wird der Nullraum $\{x \mid \|x\|=0\}$ herausgeteilt.

(b) Die Involution auf $P(E)$ ist per
$(x_{i_1}^{a_1} x_{i_2}^{*a_2} \cdots x_{i_k}^{a_k})^* = x_{i_k}^{*a_k} \cdots x_{i_2}^{a_2} x_{i_1}^{*a_1}$ und $(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$ gegeben.

(c) Ist A eine <u>beliebige</u> involutive Algebra, so ist
$C^*(A) = \overline{A/\{x \mid \|x\|=0\}}^{\|\cdot\|}$ mit $\|x\| := \sup\{p(x) \mid p \ C^*\text{-Halbnorm auf } A\}$
die einhüllende C^*-Algebra von A, falls $\|x\|<\infty$ $\forall x\in A$.

(d) Die universelle C^*-Algebra $C^*(E|R)$ aus 7.1 hat folgende (sehr wichtige) <u>universelle Eigenschaft</u>:
Sei B eine C^*-Algebra mit einer Teilmenge $E' = \{y_i \in B \mid i\in I\}$, die die Relationen R erfüllt. Dann gibt es genau einen $*$-Hom. $\varphi: C^*(E|R) \longrightarrow B$ mit $\varphi(x_i) = y_i$.

⌈Der Umbenennungshomomorphismus
$$\begin{tikzcd} A(E,R) \arrow[r, "\varphi_0"] \arrow[dr, "\text{dicht}"'] & B \\ & C^*(E|R) \arrow[u, dashed, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$
setzt sich zu $C^*(E|R) \to B$ fort, da φ_0 stetig ist nach
⌊der Definition von $\|\cdot\|$ auf $C^*(E|R)$.

(e) Gibt es eine Konstante $C>0$, so dass $p(x_i) < C$ für jede Halbnorm p auf $A(E,R)$ und alle $i\in I$, so existiert $C^*(E,R)$ (d.h. $\|x\|<\infty$ $\forall x\in A(E,R)$), denn für jedes Monom $f = x_{i_1}^{a_1} x_{i_2}^{*a_2} \cdots x_{i_k}^{a_k}$ ist
$\|f\| \le C^{a_1+a_2+\dots+a_k} < \infty$, also auch für jedes Polynom.

7.3 <u>Beispiel</u>: Sei $S^1 = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$. Dann ist
$\mathcal{C}(S^1) \cong C^*(u, 1 \mid u^*u = uu^* = 1)$. Also ist $\mathcal{C}(S^1)$ die universelle C^*-Algebra, die von einem Unitären erzeugt wird.

$\ulcorner$ Bew: $C^*(u,1) = C^*(u,1 \mid \dots)$ wird von zwei Elementen u und 1 und den Relationen $u^*u - 1$, $uu^* - 1$, $1 \cdot u - u$, $u \cdot 1 - u, \dots$ erzeugt. Die universelle C^*-Algebra existiert, da
$p(1)^2 = p(1^*1) = p(1)$, d.h. $p(1) \leq 1$ und $p(u)^2 = p(u^*u) = p(1) \leq 1$.
Die identische Funktion $z(t) = t$ in $\mathcal{C}(S^1)$ und $1(t) = 1$ erfüllen
$z^*z = zz^* = 1$, also $\underset{(7.2(d))}{\text{ex.}}$ $\varphi: C^*(u,1) \longrightarrow \mathcal{C}(S^1)$, $u \longmapsto z$, $1 \longmapsto 1$ und ist surjektiv nach Stone-Weierstraß.
Andererseits ist $C^*(u,1) \cong \mathcal{C}(\mathrm{Sp}\, u)$ nach $\underset{(3.19(a))}{\text{Gelfand}}$ und
$\mathrm{Sp}\, u \subseteq S^1$ nach Blatt 2, A1(b).
Also ex. $\psi: \mathcal{C}(S^1) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathrm{Sp}\, u) \xrightarrow{\cong} C^*(u,1)$ (Funkt.kalk.)
$f \longmapsto f_{|\mathrm{Sp}\, u} \longmapsto f(u)$
$\llcorner$ und $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{C^*(u,1)}$, also φ auch injektiv.

Die Philosophie bei $\mathcal{C}(S^1) \cong C^*(u,1)$ ist: Habe $C^*(u,1) \cong \mathcal{C}(X)$ mit $X \subseteq S^1$. Da „u universell" ist, muss schon das Maximale, also $X = S^1$ gelten.

7.4 <u>Beispiel</u>: $C^*(x \mid x^2 = 0, x = xx^*x) \cong M_2(\mathbb{C})$

$\ulcorner$ Bew: $C^*(x \mid \dots)$ ex., da $p(x)^2 = p(x^*x) = p(x^*xx^*x) = p(x)^4$.
Betrachte $y := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$. Dann $y^2 = 0$, $y = yy^*y$,
also $\underset{(7.2(d))}{\text{ex.}}$ $\varphi: C^*(x \mid x^2 = 0, x = xx^*x) \to M_2(\mathbb{C})$, $\varphi(x) = y$.
φ ist surjektiv, da $y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $y^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $y^*y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$yy^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ eine Basis von $M_2(\mathbb{C})$ ist.
Die Monome in $C^*(x \mid \dots)$ sind x, x^*, x^*x, xx^*,
also ist $C^*(x \mid \dots)$ vierdimensional, genauso wie $M_2(\mathbb{C})$
$\llcorner$ $\overset{LA}{\Longrightarrow}$ φ ist ein Isomorphismus

7.5 <u>Beispiel</u>: $C^*(x \mid x = x^*)$ existiert <u>nicht</u>, da es s.a. Elemente beliebig großer Norm gibt, also $\|x\| = \infty$.

7.6 <u>Beispiel</u>: Für $n \geq 2$ sind isomorph:

(i) $M_n(\mathbb{C})$

(ii) $C^*(e_{ij},\ i,j = 1,\dots n \mid e_{ij}^* = e_{ji},\ e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}\ \ \forall i,j,k,l)$

(iii) $C^*(x_1, \dots x_n \mid x_i^* x_j = \delta_{ij} x_1)$

$\ulcorner$ <u>Bew</u>: (i) $\cong$ (ii): $E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}{}_i \in M_n(\mathbb{C})$ erfüllen die Relationen von (ii). Also ex. $\dot{\varphi}$ $C^*(e_{ij} \mid \dots) \xrightarrow{\varphi} M_n(\mathbb{C})$ und φ ist surjektiv. $C^*(e_{ij} \mid \dots)$ ist n^2-dimensional, $M_n(\mathbb{C})$ ebenso, also ist φ auch injektiv.

($C^*(e_{ij} \mid \dots)$ ex., da $p(e_{ij})^2 = p(e_{ji}e_{ij}) = p(e_{jj}) \leq 1$,
denn $p(e_{jj})^2 = p(e_{jj}^2) = p(e_{jj}) \in (0,1]$)

(ii) $\cong$ (iii): Es ex. $\varphi: C^*(e_{ij} \mid \dots) \longrightarrow C^*(x_1, \dots x_n \mid \dots)$ und $\psi: C^*(x_1 \dots x_n \mid \dots) \longrightarrow C^*(e_{ij} \mid \dots)$ mit $\varphi \circ \psi = id$, $\psi \circ \varphi = id$. Also φ, ψ Isomorphismen (Übung) $\llcorner$

7.7 <u>Bemerkung</u>: Auf Blatt 3, A2 wurde gezeigt, dass $M_n(\mathbb{C})$ einfach ist, d.h. $I \lhd M_n(\mathbb{C}) \Rightarrow I = 0$ oder $I = M_n(\mathbb{C})$.
Insofern gilt: Ist B eine C^*-Algebra mit $y_1, \dots y_n \in B$ und $y_i^* y_j = \delta_{ij} y_1$, so ist $M_n(\mathbb{C}) \cong C^*(y_1, \dots y_n) \subseteq B$.
Denn es ex. $\varphi: M_n(\mathbb{C}) \twoheadrightarrow C^*(y_1, \dots y_n) \subseteq B$ nach 7.6 und der universellen Eigenschaft. Außerdem $\operatorname{Ker}\varphi \lhd M_n(\mathbb{C})$, also $\operatorname{Ker}\varphi = 0$, falls $\varphi \neq 0$.

7.8 Beispiel: Es sind isomorph:

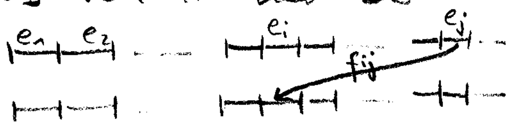
(i) $\mathcal{K}(H)$ die kompakten Operatoren auf einem sep. Hilbertraum

(ii) $C^*(e_{ij},\ i,j\in\mathbb{N} \mid e_{ij}^* = e_{ji},\ e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}\quad \forall i,j,k,l\in\mathbb{N})$

(iii) $C^*(x_i,\ i\in\mathbb{N} \mid x_i^* x_j = \delta_{ij}\, x_1)$

In (ii) und (iii) kann $\mathbb{N}$ durch eine beliebige abzählbare Indexmenge I ersetzt werden.

Bew: (i)$\cong$(ii): Sei $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine ONB von H und sei $f_{ij}(e_n) := \delta_{jn} e_i$, $n\in\mathbb{N}$, $i,j\in\mathbb{N}$.



Dann $f_{ij}\in\mathcal{K}(H)$, da f_{ij} endlich-dim. Bild hat (also ist $\overline{f_{ij}B(0,1)}$ abgeschlossen, beschränkt im Endlichdimensionalen, also kompakt).

Es ex. $C^*(e_{ij}\mid\ldots) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{K}(H)$, $\varphi(e_{ij}) = f_{ij}$ nach der univ. Eig.

φ ist surjektiv, da die Operatoren endlichen Rangs in $\mathcal{K}(H)$ dicht liegen und als Linearkombinationen der f_{ij} dargestellt werden können. Setze $M_n := C^*(e_{ij},\ i,j=1,\ldots,n) \subseteq C^*(e_{ij}\mid\ldots)$. Dann ist $M_n(\mathbb{C}) \cong M_n$ nach 7.6 und 7.7.

Somit ist $\varphi_{|M_n}: M_n \longrightarrow \mathcal{K}(H)$ injektiv (denn $\mathrm{Kern}\,\varphi_{|M_n} \lhd M_n \cong M_n(\mathbb{C})$) und also isometrisch (5.10). Also ist φ isometrisch auf der dichten Teilmenge $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n \subseteq C^*(e_{ij}\mid\ldots)$ und somit auch auf $C^*(e_{ij}\mid\ldots)$.

10.1.2011 (ii)$\cong$(iii): wie in 7.6, s. Übung Blatt 5

7.9 Bemerkung: $\mathcal{K}(H)$ ist einfach. (Übung, Blatt 5)

Nach Beispiel 7.3 liegt es nahe, auch die Struktur einer Isometrie an sich zu betrachten.

7.10 Definition: $\mathcal{J} := C^*(v, 1 \mid v^*v = 1)$ ist die universelle C^*-Algebra, die von einer Isometrie erzeugt wird, die Toeplitzalgebra.

7.11 Erinnerung: Sei H ein separabler Hilbertraum mit ONB $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Auf Blatt 11, A1 haben wir gesehen, dass der einseitige (oder unilaterale) Shift $S \in \mathcal{L}(H)$, gegeben durch $Se_n = e_{n+1}$ $\forall n$, eine Isometrie aber kein Unitäres ist.

7.12 Satz: Der kanonische *-Hom. $\varphi : \mathcal{J} \longrightarrow C^*(S) \subseteq \mathcal{L}(H)$, $\varphi(v) = S$, ist ein Isomorphismus und die Sequenz

$$0 \to \mathcal{K}(H) \to \mathcal{J} \to \mathcal{C}(S^1) \to 0 \quad \text{ist exakt.}$$

(d.h. $\mathcal{J}$ besitzt ein Ideal $I \cong \mathcal{K}(H)$, so dass $\mathcal{J}/I \cong \mathcal{C}(S^1)$)

(Philosophie: Um wieviel unterscheidet sich eine Isometrie an sich von einem Unitären an sich? Um die kompakten Operatoren.)

Bew: 1.) φ existiert, da S eine Isometrie ist, und ist surjektiv (auf $C^*(S)$). Bzz.: $\|\varphi(x)\| = \|x\|$ $\forall x \in \mathcal{J}$

Es gilt $\|x\| = \sup\{\|\varrho(x)\| \mid \varrho \text{ irred. Darst. von } \mathcal{J}\}$, denn für alle solche ϱ ist $\|\varrho(x)\| \leq \|x\|$. Andererseits ex. eine irred. Darst. ϱ mit $\|\varrho(x)\| = \|x\|$. (6.25)

Da $\|\varphi(x)\| \leq \|x\|$ ist also zu zeigen, dass $\|\varrho(x)\| \leq \|\varphi(x)\|$ für jede irred. Darst. ϱ von $\mathcal{J}$.

Vorüberlegung: Setze $p := 1 - vv^*$, der „Defekt" (hält v davon ab ein Unitäres zu sein). p ist eine Projektion.

Es gilt: $\forall x \in \mathcal{J}\ \exists \lambda \in \mathbb{C}: \quad pxp = \lambda p$

Jedes Monom in $\mathcal{J}$ ist der Form $v^k v^{*l}$, $k, l \in \mathbb{N}_0$ und für solche x gilt das: $pv^k v^{*l} p = \delta_{k0}\delta_{l0}\, p$

Somit existiert ein Zustand $f: J \to \mathbb{C}$ mit
$pxp = f(x)p \quad \forall x \in J$ (f pos., linear, unital)

Dann ist $(\pi_f(x)\xi_f \mid \xi_f) \overset{6.14}{=} f(x) = (\varphi(x)e_1 \mid e_1) \quad \forall x \in J$

Π Sei $x = v^k v^{*\ell}$, $k, \ell \in \mathbb{N}_0$. Dann $(\varphi(x)e_1 \mid e_1) = (S^k S^{*\ell} e_1 \mid e_1)$
$= (S^{*\ell} e_1 \mid S^{*k} e_1) = \delta_{\ell 0}\,\delta_{k 0}\, 1 = f(v^k v^{*\ell}) = f(x)$.
∐

Nach 6.13 sind π_f und φ unitär äquivalent.

Sei nun $\varrho: J \to \mathcal{L}(H_\varrho)$ irred. Darst. von J. bzz. $\|\varrho(x)\| \le \|\varphi(x)\|$

1. Fall: $\varrho(p) \neq 0$. Dann ex. $\xi \in H_\varrho$ mit $\|\xi\| = 1$ und $\varrho(p)\xi = \xi$.

Dann $(\varrho(x)\xi \mid \xi) = (\varrho(x)\varrho(p)\xi \mid \varrho(p)\xi) = (\varrho(pxp)\xi \mid \xi) = f(x)(\varrho(p)\xi \mid \xi) = f(x)$

Nach 6.13 gilt also $\varrho \cong \pi_f \cong \varphi$ (unitäre Äq.), dh.
$\|\varrho(x)\| = \|U\varphi(x)U^*\| \le \|\varphi(x)\|$ für ein $U: H \to H_\varrho$ unitär.

2. Fall: $\varrho(p) = 0$. Dann ist $\varrho(v)$ unitär, also ex.
$\psi: \mathcal{C}(S^1) \longrightarrow C^*(\varrho(v))$ mit $\psi(z) = \varrho(v)$. (s. 7.3)

Zeige in 2.): $\mathcal{K}(H) \lhd C^*(S)$ mit $\dfrac{C^*(S)}{\mathcal{K}(H)} \cong \mathcal{C}(S^1)$

via
$$C^*(S) \xrightarrow{\sigma} \frac{C^*(S)}{\mathcal{K}(H)} \cong \mathcal{C}(S^1).$$
$$S \longmapsto \sigma(S) \longmapsto z$$

Also
$$J \xrightarrow{\varphi} C^*(S) \xrightarrow{\sigma} \frac{C^*(S)}{\mathcal{K}(H)} \overset{\alpha}{\cong} \mathcal{C}(S^1) \xrightarrow{\psi} C^*(\varrho(v)),$$
$$v \longmapsto S \longmapsto \sigma(S) \longmapsto z \longmapsto \varrho(v)$$

dh. $\varrho = \psi \circ \alpha \circ \sigma \circ \varphi$ (genügt auf Erzeugern zu überprüfen, 3.17)

Also $\|\varrho(x)\| = \|\psi \circ \alpha \circ \sigma(\varphi(x))\| \le \|\varphi(x)\|$.

2.) Laut 7.8 ist $\mathcal{K}(H) = C^*(f_{ij} \mid i,j \in \mathbb{N})$ mit $f_{ij}(e_n) = \delta_{jn} e_i$.

Andererseits $f_{ij} = S^{(i-1)}(1 - SS^*)S^{*(j-1)}$ für $i,j \in \mathbb{N}$

Π $S^{(i-1)}(1-SS^*)S^{*(j-1)}e_n = \begin{cases} S^{(i-1)}(1-SS^*)e_{n-j+1} & n \ge j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

(1-SS* ist die Projektion auf $\langle e_1 \rangle$)

$$\overset{\downarrow}{=} \begin{cases} S^{(i-1)} e_1 & n = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \delta_{nj}\, e_{1+(i-1)} = \delta_{nj}\, e_i$$

∐

Daher ist $f_{ij} \in C^*(S)$ $\forall i,j$, dh. $\mathcal{K}(H) \subseteq C^*(S)$.
Da $\mathcal{K}(H)$ ein Ideal in $\mathcal{L}(H)$ ist, ist $\mathcal{K}(H)$ auch ein Ideal in $C^*(S)$.
Unter $\sigma: C^*(S) \to \frac{C^*(S)}{\mathcal{K}(H)}$ ist $\sigma(S)$ unitär (da $\sigma(\underbrace{1-SS^*}_{=f_{11}})=0$)

Also $\frac{C^*(S)}{\mathcal{K}(H)} \cong \mathcal{C}(\mathrm{Sp}\,\sigma(S))$. bzw. $\mathrm{Sp}\,\sigma(S)) = S^1$.

Sei $\lambda \in S^1$. Betrachte $d(\lambda) \in \mathcal{L}(H)$, gegeben durch $d(\lambda)e_n = \lambda^n e_n$.
Dann $d(\lambda)^* = d(\bar\lambda)$ und $d(\lambda)$ ist unitär.
Habe $d(\lambda) S e_n = d(\lambda) e_{n+1} = \lambda^{n+1} e_{n+1} = \lambda S d(\lambda) e_n$ $\forall n$,
also $d(\lambda) S = \lambda S d(\lambda)$ bzw. $d(\lambda) S d(\lambda)^* = \lambda S$.
Somit ist $\beta: C^*(S) \to C^*(S)$, $x \mapsto d(\lambda) x d(\lambda)^*$ ein Automorphismus (Isomorphismus auf sich selbst)
mit $\beta(\mathcal{K}(H)) \subseteq \mathcal{K}(H)$ (denn $\beta(f_{ij}) = d(\lambda) S^{(i-1)}(1-SS^*) S^{*(j-1)} d(\lambda)^* = \lambda^{i-j} f_{ij} \in \mathcal{K}(H)$)

$\Rightarrow$ $\dot\beta: \frac{C^*(S)}{\mathcal{K}(H)} \to \frac{C^*(S)}{\mathcal{K}(H)}$, $\sigma(x) \mapsto \sigma(\beta(x))$ Automorphismus mit $\dot\beta(\sigma(S)) = \lambda\sigma(S)$

Dann ist $\mathrm{Sp}\,\sigma(S) = \mathrm{Sp}\,\dot\beta(\sigma(S)) = \lambda\,\mathrm{Sp}\,\sigma(S)$
$\overset{\forall \lambda \in S^1}{\Longrightarrow}$ $\mathrm{Sp}\,\sigma(S) = S^1$

7.13 <u>Bemerkung</u>: Obiger Beweis zeigt: $J \cong C^*(S)$.

$$\mathcal{K}(H) = C^*(f_{ij} \mid i,j \in \mathbb{N}) \trianglelefteq C^*(S)$$

Unter dem Isomorphismus ist $v^{(i-1)}(1-vv^*)v^{*(j-1)} \longleftrightarrow f_{ij}$.
Kann daher auch direkt sehen:

$$\mathcal{K}: C^*(e_{ij} \mid i,j \in \mathbb{N}) \hookrightarrow J, \quad e_{ij} \mapsto v^{(i-1)}(1-vv^*)v^{*(j-1)} \quad \text{für } i,j \in \mathbb{N}$$

Insofern ist $\mathcal{K} \cong \langle 1-vv^* \rangle \trianglelefteq J$, wobei $\langle 1-vv^* \rangle$ das von $1-vv^*$ erzeugte Ideal bezeichnet.

7.14 <u>Bemerkung</u>: Wir haben gesehen:

$$C^*(v \mid v \text{ ist Isometrie}) \cong C^*(S \text{ unilat. Shift}) \subseteq \mathcal{L}(H)$$

Ebenso kann man zeigen:

$$C^*(u \mid u \text{ ist unitär}) \cong C^*(\tilde{S} \text{ bilateraler Shift}) \subseteq \mathcal{L}(H'),$$

wobei H' mit ONB $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ und $\tilde{S}e_n := e_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{Z}$

($\tilde{S}$ ist also unitär)

(Zeige dazu $Sp\,\tilde{S} = S^1$ genau wie im Beweis von 7.12)

7.15 <u>Bemerkung</u>: Mitunter wird die Toeplitzalgebra auch über Toeplitzoperatoren eingeführt: Der Hilbertraum $L^2(S^1)$ der quadratintegrierbaren Funktionen auf S^1 bzgl. des (normierten) Lebesguemaßes hat eine ONB $e_n = z^n$, $n \in \mathbb{Z}$, wobei z die identische Funktion auf S^1 ist. Sei $H^2 \subseteq L^2(S^1)$ der Teilraum, der von $(e_n)_{n\geq 0}$ aufgespannt wird. Zu $g \in L^\infty(S^1)$ ist $M_g : L^2(S^1) \to L^2(S^1)$, $f \mapsto gf$ ein Multiplikationsoperator und

$T_g : H^2 \to H^2$, $T_g := P_{H^2} M_g$ ein Toeplitzoperator mit Symbol g.

(P_{H^2} ist die Projektion auf H^2). Dann korrespondiert T_z zu dem unilateralen Shift S (denn $T_z e_n = z \cdot z^n = e_{n+1}$).

Man sieht dann, dass $\mathcal{J} \cong \{T_f + k \mid f \in \mathcal{C}(S^1), k \in \mathcal{K}(H)\}$, da letzteres die von T_z erzeugte C^*-Algebra ist.

7.16 <u>Bemerkung</u> (Satz von Coburn): Ist H ein Hilbertraum und $w \in \mathcal{L}(H)$ eine echte Isometrie (d.h. $w^*w = 1$, $ww^* \neq 1$), so ist

$$\mathcal{J} \cong C^*(w) \subseteq \mathcal{L}(H).$$
$$v \mapsto w$$

Mit anderen Worten: Ist A eine C^*-Algebra und $w \in A$ eine echte Isometrie, so ist $\mathcal{J} \cong C^*(w) \subseteq A$.

Das folgt aus der Wold-Zerlegung: Ist v eine Isometrie auf einem Hilbertraum H, dann ist v unitär äquivalent zu $(S\otimes 1)\oplus u$, wobei S der unilaterale Shift ist und u unitär ist. D.h. der Shift ist im Wesentlichen die einzige Isometrie.

7.17 <u>Def.</u>: Seien A, B unitale C^*-Algebren. Das (unitale) <u>freie Produkt</u> $A *_{\mathbb{C}} B$ ist die universelle C^*-Algebra, die von allen $a\in A$ (mit den Relationen von A) und allen $b\in B$ (mit den Relationen von B) erzeugt wird, so dass außer $1_A = 1_B$ keine Relationen zwischen $a\in A$ und $b\in B$ gelten.

Allgemeiner ist $A *_C B$ das <u>amalgamierte freie Produkt</u> von A und B, wenn A, B und C C^*-Algebren sind, so dass $C \overset{j_1}{\hookrightarrow} A$ und $C \overset{j_2}{\hookrightarrow} B$ Einbettungen sind (C kann also als Unteralgebra sowohl von A als auch von B aufgefasst werden). $A *_C B$ ist dann die universelle C^*-Algebra, die von allen $a\in A$ (mit den Relationen von A) und allen $b\in B$ (mit den Relationen von B) erzeugt wird, so dass $j_1(c) = j_2(c)$ $\forall c\in C$ (d.h. die Elemente von C werden in A und B identifiziert).