UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Operatoralgebren
Wintersemester 2015/2016

Blatt 1
Abgabe: Montag, 2.11.2015, 12:30 Uhr
in der Vorlesung oder bei Daniel Kraemer (Zimmer 415)

Aufgabe 1. Seien H_1 und H_2 Hilberträume und sei $T : H_1 \to H_2$ eine lineare Abbildung. Wir definieren durch $d(x,y) := \|x-y\|$ eine von der Norm $\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$ induzierte Metrik. Zeige, dass folgende Charakterisierungen von "T ist isometrisch" äquivalent sind:

(i) $d(Tx,Ty) = d(x,y) \quad \forall x,y \in H$

(ii) $\|Tx\| = \|x\| \quad \forall x \in H$

(iii) $\langle Tx,Ty\rangle = \langle x,y\rangle \quad \forall x,y \in H$

Aufgabe 2. Sei H ein Hilbertraum. Für zwei abgeschlossene Teilräume $K_1, K_2 \subset H$ schreiben wir $H = K_1 \oplus K_2$ falls $K_1 \perp K_2$, $K_1 \cap K_2 = \{0\}$ und jedes Element $z \in H$ eine eindeutige Darstellung $z = x_1 + x_2$ mit $x_i \in K_i$ hat. Zeige:

(a) Die Abbildung $P : H \to H$, $P(x_1+x_2) := x_1$ ist eine Projektion (dh. $P = P^* = P^2$) mit $PH := \text{Bild}P = K_1$ und $\text{Kern}P = K_2$. Außerdem ist auch $1-P$ eine Projektion und zwar auf den Raum K_2 (dh. $(1-P)H = K_2$).

(b) Ist umgekehrt $P : H \to H$ eine Projektion, so ist PH abgeschlossen und mit $K_1 := PH$ und $K_2 := (PH)^\perp$ ist eine Zerlegung $H = K_1 \oplus K_2$ gegeben.

Aufgabe 3. Ähnlich wie in Aufgabe 2 lassen sich auch andere Eigenschaften von Operatoren rein algebraisch fassen. Zeige:

(a) $V \in \mathcal{L}(H)$ ist eine *Isometrie* (dh. $V^*V = 1$) genau dann, wenn V isometrisch ist.

(b) $U \in \mathcal{L}(H)$ ist *unitär* (dh. $U^*U = UU^* = 1$) genau dann, wenn U ein Isomorphismus von H ist, dh. U ist isometrisch und surjektiv.

(c) Der einseitige Shift $S \in \mathcal{L}(H)$ ist gegeben durch $Se_n = e_{n+1}$, wobei $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine ONB von H ist. Zeige, dass S eine Isometrie, aber kein Unitäres ist.

(d) Gibt es auch einen endlich-dimensionalen Hilbertraum H mit einer Isometrie $V \in \mathcal{L}(H)$, die kein Unitäres ist? Haha, natürlich nicht. Warum nicht?