UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Operatoralgebren
Wintersemester 2015/2016

Blatt 2
Abgabe: Montag, 9.11.2015, 12:30 Uhr
in der Vorlesung oder bei Daniel Kraemer (Zimmer 415)

Aufgabe 1. Sei $V \in \mathcal{L}(H)$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $V = VV^*V$

(ii) V^*V ist eine Projektion. (V^*V projeziert dann auf K aus (iv))

(iii) VV^* ist eine Projektion. (V^*V projeziert dann auf $V(K)$ aus (iv))

(iv) Es gibt einen abgeschlossenen Teilraum $K \subset H$, so dass $V : K \to H$ isometrisch ist und $V_{|K^\perp} = 0$.

V heißt dann *partielle Isometrie*.

Aufgabe 2. Sei H ein Hilbertraum, $K \subset H$ ein abgeschlossener Teilraum und P die zugehörige Projektion (Blatt 1). Sei $A \in \mathcal{L}(H)$. Wir sagen, dass K *invariant ist unter* A, falls $AK \subset K$. Zeige, dass K invariant ist unter A und A^* genau dann, wenn $PA = AP$.

Aufgabe 3. Sei $S : \ell_2(\mathbb{N}) \to \ell_2(\mathbb{N})$ der einseitige Shift wie auf Blatt 1.

(a) Berechne S^* auf der kanonischen ONB und zeige $S^*S = 1$ und $SS^* \neq 1$ (wurde evtl. schon mal für Blatt 1 gemacht).

(b) Zeige, dass $S - \lambda$ für alle $|\lambda| > 1$ invertierbar ist.

(c) Zeige, dass S keine Eigenvektoren besitzt; es gibt also keine $\lambda \in \mathbb{C}$ und keine $x \in \ell_2(\mathbb{N})\backslash\{0\}$ mit $Sx = \lambda x$. Folgere, dass das Bild von $S^* - \lambda$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ dicht in $\ell_2(\mathbb{N})$ ist.

(d) Zeige, dass λ für $|\lambda| < 1$ Eigenwert von S^* ist.

(e) Folgere, dass das Spektrum von S die abgeschlossene Kreischeibe $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq 1\}$ ist.