UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Operatoralgebren
Wintersemester 2015/2016

Blatt 3
Abgabe: Montag, 16.11.2015, 12:30 Uhr
in der Vorlesung oder bei Daniel Kraemer (Zimmer 415)

Aufgabe 1. Sei A eine unitale C^*-Algebra. Zeige folgende Aussagen über das Spektrum $\mathrm{sp}(x)$ für bestimmte Elemente $x \in A$. (Vgl. Bemerkung 3.13)

(a) Ist $x \in A$ invertierbar, so ist $\mathrm{sp}(x^{-1}) = \{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \mathrm{sp}\, x\}$.

(Dies gilt übrigens schon, wenn A bloß eine Algebra ist.)

(b) Ist $u \in A$ unitär (dh. $u^*u = uu^* = 1$), so ist $\mathrm{sp}(u) \subset S^1 \subset \mathbb{C}$, wobei S^1 der Einheitskreis auf $\mathbb{C}$ ist.

Zeige dafür, dass $\|u\| = \|u^*\| = 1$ und benutze (a).

(c) Ist $x \in A$ selbstadjungiert (und A nicht notwendig unital), so ist $\mathrm{sp}(x) \subset \mathbb{R}$.

Zeige dafür, dass jeder Spektralwert λ aus $\mathrm{sp}(x)$ einen Spektralwert des unitären Lifts $u := e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}$ induziert. Dafür ist das Element $z := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n(\lambda - x)^{n-1}}{n!}$ hilfreich. Benutze schließlich (b).

Aufgabe 2. (a) Zeige, dass die C^*-Algebra $M_n(\mathbb{C})$ der komplexwertigen $n \times n$-Matrizen *einfach* ist: Ist I ein abgeschlossenes (zweiseitiges) Ideal in $M_n(\mathbb{C})$, so ist $I = \{0\}$ oder $I = M_n(\mathbb{C})$.

(b) Seien A und B beliebige C^*-Algebren und $\varphi : A \to B$ ein *-Homomorphismus. Zeige, dass $\ker \varphi$ ein Ideal in A ist.

(c) Zeige, dass es keine *-Homomorphismen von $M_n(\mathbb{C})$ nach $\mathbb{C}$ gibt, wenn $n \geq 2$. Insofern ist $\mathrm{Spec}(M_n(\mathbb{C})) = \emptyset$. Die Gelfandtransformation ist in diesem Fall also nur mäßig spannend und Satz 2.8 hat kein Analogon.

Aufgabe 3. Sei A eine C^*-Algebra und sei $a \in A$ normal. Sei $f \in C(\mathrm{sp}(a))$ eine stetige Funktion auf dem Spektrum von a. Zeige, dass dann $\mathrm{sp}(f(a)) = f(\mathrm{sp}(a))$ gilt, wobei $f(\mathrm{sp}(a)) = \{f(\lambda) \mid \lambda \in \mathrm{sp}(a)\}$.