UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Operatoralgebren
Wintersemester 2015/2016

Blatt 4
Abgabe: Montag, 23.11.2015, 12:30 Uhr
in der Vorlesung oder bei Daniel Kraemer (Zimmer 415)

Aufgabe 1. Sei A eine C^*-Algebra und seien $x, h \in A$ zwei selbstadjungierte Elemente mit $h \geq 0$ und $h \geq x$. Der positive Teil x_+ von x ist definiert per Funktionalkalkül als $x_+ := f_+(x)$, wobei $f_+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben ist durch $f_+(t) := \begin{cases} t & \text{falls } t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

(a) Zeige, dass $h \geq x_+$ ist, falls A kommutativ ist.

(b) Zeige, dass im Allgemeinen $h \ngeq x_+$ ist, falls A nicht kommutativ ist. Gib dazu ein Gegenbeispiel mit $A = M_2(\mathbb{C})$ an.

Aufgabe 2. Sei H ein Hilbertraum und sei $x \in B(H)$. Wir definieren $|x| := \sqrt{x^*x}$.

(a) Zeige, dass $\ker|x| = \ker(x)$ ist und dass die Abbildung $\Psi : \text{Bild}|x| \to \text{Bild}(x)$, $|x|\xi \mapsto x\xi$ wohldefiniert und isometrisch ist. Somit besitzt sie eine isometrische Fortsetzung $\Psi_0 : \overline{\text{Bild}|x|} \to \overline{\text{Bild}(x)}$.

(b) Wir definieren

$$v = \begin{cases} \Psi_0, & \text{auf } \overline{\text{Bild}|x|} \\ 0, & \text{auf } \overline{\text{Bild}|x|}^{\perp} = \ker(x) \end{cases}$$

Zeige, dass v eine *partielle Isometrie* ist, dass also $v = vv^*v$ gilt, und dass v^*v die Projektion auf $(\ker(x))^{\perp}$ sowie vv^* die Projektion auf $\overline{\text{Bild}(x)}$ ist.

(c) Zeige, dass sich x als $x = v|x|$ schreiben lässt. Zeige auch, dass die partielle Isometrie v eindeutig bestimmt ist durch die Forderungen $x = v|x|$ und $\ker(v) = \ker(x)$. Diese Zerlegung von x heißt *Polarzerlegung*.

Aufgabe 3. (a) Seien $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen in $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ mit $f_n(x) = 1$ für $|x| < n$. Zeige, dass die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine approximierende Eins für $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ ist.

(b) Sei H ein separabler Hilbertraum mit unendlicher Dimension. Finde eine Folge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Operatoren, welche eine approximierende Eins für die kompakten Operatoren $\mathcal{K}(H)$ ist.