UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Operatoralgebren
Wintersemester 2015/2016

Blatt 5
Abgabe: Montag, 30.11.2015, 12:30 Uhr

Aufgabe 1. Sei tr die normalisierte Spur auf $M_n(\mathbb{C})$, gegeben durch $\mathrm{tr}((a_{ij})) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_{ii}$. Es ist bekannt, dass $\mathrm{tr}(xy) = \mathrm{tr}(yx)$ gilt. Sei $h \in M_n(\mathbb{C})$ ein positives Element und $f_h : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ durch $f_h(x) := \mathrm{tr}(hx)$ definiert. Zeige, dass die Abbildung $h \mapsto f_h$ eine ordnungserhaltende Bijektion zwischen der Menge der positiven Elemente von $M_n(\mathbb{C})$ und der Menge der positiven Funktionale von $M_n(\mathbb{C})$ definiert, mit $\|f_h\| = \mathrm{tr}(h)$.

Aufgabe 2. Sei f ein Zustand auf einer C^*-Algebra A und (π_f, H_f) die zugehörige GNS-Darstellung.

(a) Sei $I \lhd A$ ein Ideal in A. Zeige: $\quad I \subset \mathrm{kern}(\pi_f) \iff I \subset \mathrm{kern}(f)$

(b) f heißt *treu*, falls $f(a) = 0 \Longrightarrow a = 0$ für jedes positive $a \in A$.
Zeige, dass $\mathrm{kern}(\pi_f) = 0$, falls f treu ist.

(c) Sei $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine approximierende Eins in A. Zeige, dass $(\pi_f(u_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ in $\mathcal{L}(H_f)$ in der starken Operatortopologie gegen 1 konvergiert (dass also $\pi_f(u_\lambda)\xi \to \xi$ gilt, für alle $\xi \in H_f$).

Aufgabe 3. Beweise Lemma 6.13: Seien (π_i, H_i, ξ_i), $i = 1, 2$ zwei zyklische Darstellungen einer C^*-Algebra A, seien $f_i : A \to \mathbb{C}$, $i = 1, 2$ zwei positive Funktionale mit $f_i(x) = \langle \pi_i(x)\xi_i, \xi_i\rangle$. Gilt nun $f_1 = f_2$, so gibt es ein Unitäres $U : H_1 \to H_2$ mit $\pi_2(x) = U\pi_1(x)U^*$ und $U\xi_1 = \xi_2$. (Tipp: Zeige zunächst, dass $\pi_1(x)\xi_1 \mapsto \pi_2(x)\xi_2$ isometrisch ist.)

Zusatzaufgabe*. Ein Zustand f auf einer C^*-Algebra heißt *rein*, falls es für jedes positive lineare Funktional g mit $0 \le g \le f$ eine Zahl $\lambda \in [0,1]$ gibt, so dass $g = \lambda f$ ist.
Zeige, dass die reinen Zustände auf $M_n(\mathbb{C})$ genau die f_h sind, bei denen h ein Vielfaches einer Rang-1-Projektion (dh. das Bild der Projektion h ist eindimensional) ist.
Wie sieht eigentlich die zu tr assoziierte GNS-Darstellung von $M_n(\mathbb{C})$ aus? Und wie jene zu einem reinen Zustand assoziierte?
[In einem Krein-Milman-Sinne sind die reinen Zustände die Extremalpunkte aller Zustände. Man kann daher zeigen, dass im Allgemeinen die GNS-Darstellung zu einem reinen Zustand $f : A \to \mathbb{C}$ *irreduzibel* ist, dh. die einzigen abgeschlossenen Unterräume von H_f, die unter $\pi_f(A)$ invariant sind, sind 0 und H_f. Insofern ergeben reine Zustände also besonders "platzsparende" Darstellungen.]