UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Operatoralgebren
Wintersemester 2015/2016

Blatt 6
Abgabe: Montag, 7.12.2015, 12:30 Uhr

Aufgabe 1. Führe Bemerkung 7.4 aus, zeige also:

(a) Die Multiplikation ist getrennt stetig in der schwachen [sowie in der starken] Operatortopologie. Sei also $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ein Netz in $\mathcal{L}(H)$, das schwach [stark] gegen $x \in \mathcal{L}(H)$ konvergiert. Dann konvergiert $(x_\lambda y)_{\lambda\in\Lambda}$ schwach [stark] gegen xy.

(b) Die Involution ist stetig in der schwachen Operatortopologie.

(c) Weder Involution noch Norm sind stetig in der starken Operatortopologie (benutze $x_n\xi := e_1\langle\xi, e_n\rangle$ für eine ONB $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

Aufgabe 2. Beweise Lemma 7.7: Seien $S, T \subset \mathcal{L}(H)$ zwei Teilmengen. Zeige:

(a) Die Kommutante $S' \subset \mathcal{L}(H)$ ist eine schwach abgeschlossene, unitale Algebra.

(b) Ist $x^* \in S$ für alle $x \in S$, so ist S' sogar *-abgeschlossen und also eine Von-Neumann-Algebra.

(c) Es gilt $S \subset S''$, $S''' = S'$ und $T' \subset S'$ falls $S \subset T$.

Aufgabe 3. Seien $e, f \in \mathcal{L}(H)$ zwei Projektionen (also $e = e^* = e^2$ und ebenso für f). Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind (wir schreiben dann $e \leq f$):

(i) $ef = e$	(ii) $fe = e$	(iii) $eH \subseteq fH$
(iv) $f - e$ ist eine Projektion	(v) $f - e$ ist positiv	