UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Operatoralgebren
Wintersemester 2015/2016

Blatt 7
Abgabe: Montag, 14.12.2015, 12:30 Uhr

Aufgabe 1. Wir betrachten die Von-Neumann-Algebra $A = \mathcal{L}(H)$ für einen separablen Hilbertraum H und Projektionen $e, f \in \mathcal{L}(H)$. Zeige:

(a) $e \sim f$ genau dann, wenn $\dim eH = \dim fH$.

(b) $e \prec f$ genau dann, wenn $\dim eH \leq \dim fH$.

(c) e ist minimal genau dann, wenn e eine Rang-1-Projektion ist.

(d) e ist endlich genau dann, wenn eH endlich-dimensional ist.

(e) Finde eine Von-Neumann-Algebra $A \subset M_3(\mathbb{C})$ und Projektionen $e, f, g \in A$, so dass $e \sim f \prec g$ mit $f \nsim g$ in $M_3(\mathbb{C})$ gilt, aber $e \nsim f$ und $f \nprec g$ in A.

Aufgabe 2. Sei $A \subset \mathcal{L}(H)$ ein Faktor und seien $e, f \in A$ Projektionen. Zeige:

(a) Sind e und f minimal, so gilt $e \sim f$.

(b) Ist f endlich und ist $e \prec f$, so ist auch e endlich.

(c) $ef = 0$ genau dann, wenn $eH \perp fH$. In diesem Fall ist $e + f$ eine Projektion.

(d*) Ist e unendlich, so gibt es unendliche Projektionen $e_1, e_2 \in A$ mit $e_1 e_2 = 0$ und $e_1 + e_2 \leq e$.

(*Hinweis:* Es gibt ein $v \in A$ mit $v^*v = e$ und $vv^* \leq e \neq vv^*$. Betrachte $v^n(e - vv^*)(v^*)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.)