UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Moritz Weber
feat. MSc. Jonas Wahl

Übungen zur Vorlesung Operatoralgebren
Wintersemester 2015/2016

Blatt 8
Abgabe: Montag, 18.1.2016, 12:00 Uhr (Bearbeitung **2 Wochen!**)

Aufgabe 1. Es sei M eine endliche von Neumannalgebra mit Spurzustand τ und zugehörigem GNS-Hilbertraum $L^2(M,\tau)$ mit zyklischem Vektor Ω. Betrachte die antilineare Abbildung $J : M\Omega \to M\Omega;\ x\Omega \mapsto x^*\Omega$. Beweise die folgenden Aussagen:

(a) J setzt sich zu einer antilinearen Isometrie $L^2(M,\tau) \to L^2(M,\tau)$ fort und es gilt $J^2 = 1$.

(b) $JMJ = M'$.

Aufgabe 2. (a) Es sei M eine von Neumannalgebra, $\mathcal{H}$ ein linkes M-Modul. Beweise, dass $p \mapsto p\mathcal{H}$ eine Bijektion zwischen $\mathcal{P}({}_M B(\mathcal{H}))$ und der Menge der Untermoduln von $\mathcal{H}$ definiert. Zeige ferner, dass $p\mathcal{H} \cong q\mathcal{H}$ für $p, q \in \mathcal{P}({}_M B(\mathcal{H}))$ genau dann gilt, wenn $p \sim q$ in ${}_M B(\mathcal{H})$.

(b) Beweise Beispiel 2.7 aus der Vorlesung: Es seien $H \subset G$ diskrete Gruppen mit unendlichen nicht-trivialen Konjugationsklassen. Dann gilt

$$[L(G) : L(H)] = [G : H].$$

Aufgabe 3. Es sei $N \subset M$ ein Unterfaktor mit endlichem Index $[M : N] < \infty$. Zeige: Gibt es paarweise orthogonale Projektionen $p_1, \ldots, p_n \in N' \cap M$, so gilt $[M : N] \geq n^2$. Folgere, dass $N \subset M$ irreduzibel ist, falls $[M : N] < 4$.
Hinweis: Verwende Lemma 2.10.

Aufgabe 4. Es sei $N \subset M$ ein Unterfaktor. Zeige unter Verwendung von Lemma 3.2 und Aufgabe 3:

(a) $[M : N] = 1$ genau dann, wenn $M = N$.

(b) Ist $N \neq M$, dann gilt $[M : N] \notin (1, 2)$.